

## **ВЛИЯНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОМЫСЛА НА ГЕНЕТИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ И ХАРАКТЕР ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МЕНДЕЛЕВСКОЙ ЛИМИТИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ**

Е.А. Колбина<sup>1</sup>, Е.Я. Фрисман<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
г. Владивосток

<sup>2</sup>Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,  
г. Биробиджан

Рассмотрено влияние оптимального промысла на динамику численности и генетического состава менделевской однолокусной популяции. Показано, что оптимальный промысел с постоянной долей изъятия стабилизирует популяционную динамику, с переменной долей - может вызвать колебания численности. Особое внимание уделяется изучению возможности сохранения или утраты полиморфизма в результате оптимального равновесного промысла.

Ключевые слова: математическая модель, оптимальный промысел, эволюция, полиморфизм, естественный отбор, устойчивость, популяция.

## **THE INFLUENCES OF OPTIMAL HARVESTING ON A GENETIC DIVERSITY AND CHARACTER DYNAMIC BEHAVIOR OF THE MENDELIAN LIMITED POPULATION**

E.A. Kolbina<sup>1</sup>, E.Ya. Frisman<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Automation and Control Processes FEB RAS,  
Vladivostok

<sup>2</sup>Institute of Complex Analysis of Regional Problems FEB RAS,  
Birobidzhan

The effect of the optimal harvesting on population dynamics and genetic diversity of the Mendelian one-locus population is considered. It is shown that the optimal harvesting a constant proportion of withdrawal stabilizes population dynamics, with a variable share can cause may cause fluctuations in numbers. A special emphasis is paid to studying on possibility or loosing of polymorphism as a result of equilibrium harvesting.

Keywords: mathematical model, optimal harvesting, evolution, polymorphism, natural selection, stability, population.

Целью работы является описание и исследование наиболее простой модельной ситуации, в которой проявляются закономерности взаимосвязанных изменений динамики генетической структуры и численности популяций, вызванных взаимодействием эволюционных (в основном селективных) и экологических (ограничивающих популяционный рост) факторов, включая эффекты промыслового воздействия на эксплуатируемые популяции. В

качестве такой модельной системы рассматривается диплоидная менделевская панмиктичная популяция, генетическое разнообразие в которой контролируется одним диаллельным локусом, экологическое лимитирование сводится к убывающей зависимости приспособленности от численности, а воздействие промысла - к изъятию части особей.

Введем обозначения:  $x_n$  - численность популяции в  $n$ -ом поколении,  $q_n$  - частота аллеля  $A$  в  $n$ -ом поколении (следовательно,  $(1 - q_n)$  - частота аллеля  $a$ ),  $W_{AA}(n)$ ,  $W_{Aa}(n)$ ,  $W_{aa}(n)$  - приспособленности генотипов  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$  - соответственно в  $n$ -ом поколении. Изменение численности и генетической структуры популяции описывается следующей системой рекуррентных уравнений (Ратнер, 1977):

$$\begin{cases} x_{n+1} = \bar{W}_n(x_n)x_n \\ q_{n+1} = q_n(W_{AA}(x_n)q_n + W_{Aa}(x_n)(1 - q_n)) / \bar{W}_n(x_n), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{W}_n = W_{AA}(x_n)q_n^2 + 2W_{Aa}(x_n)q_n(1 - q_n) + W_{aa}(x_n)(1 - q_n)^2$  - средняя приспособленность популяции в  $n$ -ом поколении. Будем полагать, что приспособленности зависят от численности линейно  $W_{ij} = 1 + R_{ij} - R_{ij}/K_{ij} \cdot x$ .

Соответственно каждый генотип характеризует его ресурсный ( $K_{ij}$ ) и мальтузианский ( $R_{ij}$ ) параметры. Для упрощения выкладок, введем дополнительное предположение, что все генотипы имеют одинаковую приспособленность при некотором значении численности популяции (равном  $x^*$ ).

Условия существования и разрушения генетического полиморфизма модели (1), а также результаты исследования ее динамического поведения приведены в работах (Жданова и др., 2003) и (Жданова, Фрисман, 2005).

Введем в модель (1) промысел с долей изъятия  $u$ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \bar{W}_n (1 - u) \\ q_{n+1} = q_n (W_{AA}q_n + W_{Aa}(1 - q_n)) / \bar{W}_n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R = Ux_n \bar{W}_n$  - величина изъятия,  $\bar{W}_n = W_{AA}q_n^2 + 2W_{Aa}q_n(1 - q_n) + W_{aa}(1 - q_n)^2$ .

Оптимальный равновесный уровень численности  $\bar{x}_M$ , обеспечивающий максимальный равновесный уровень изъятия, однозначно определяется уравнением  $\bar{W} = 1 - \bar{x}_M \cdot \bar{W}'_x$ . Оптимальная доля изъятия (в относительных единицах численности) имеет вид  $U_0 = 1 - \frac{1}{\bar{W}} = \frac{-\bar{x}_M \cdot \bar{W}'_x}{1 - \bar{x}_M \cdot \bar{W}'_x}$ .

Найдены равновесные значения численности и частоты аллеля  $A$  модели (2), обеспечивающие максимальный объем изъятия (Жданова и др., 2007), (Фрисман и др., 2010). Определены условия их существования и устойчивости

для двух стратегий промысла: с постоянной и переменной долями изъятия. Показано, что в состоянии, обеспечивающем максимальный уровень изъятия, значение генетического состава остается таким же, как и в случае, когда промысел отсутствует, а равновесное значение численности снижается в два раза. Также показано, что при линейном виде функций приспособленностей и при описанных соотношениях параметров модели в равновесии генетический состав популяции не зависит от ее численности. Показано, что условия существования равновесных значений в целом при отсутствии промысла и при его воздействии одинаковы.

Численное исследование влияния промысла с постоянной долей изъятия на динамику популяции показало, что промысел при любой оптимальной доле изъятия ведет к стабилизации численности и частоты аллеля  $A$ . Промысел с переменной долей изъятия может вызвать колебания численности, а при определенных начальных условиях - даже привести к вымиранию популяции. Кроме того, показано, что оптимальный промысел может привести к изменению генетического разнообразия в случае, если какая-либо из оптимальных долей изъятия переведет равновесную численность через  $x^*$ . Таким образом, промысел может привести к изменениям результатов отбора и вызвать разрушение или способствовать поддержанию полиморфизма.

#### Список литературы:

Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // ДАН. 2007. Т. 412, № 4. С. 564-567.

Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Проблемы регулярного поведения и детерминированного хаоса в математической модели эволюции менделевской лимитированной популяции // Дальневосточный математический журнал. 2003. Т. 4, № 2. С. 289-303.

Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Динамические режимы в модели однолокусного плотностно-зависимого отбора // Генетика. 2005. Т. 41, № 11. С. 1575–1584.

Ратнер В.А. Математическая популяционная генетика (элементарный курс). Новосибирск: Наука, 1977. 126 с.

Фрисман Е.Я., Жданова О.Л., Колбина Е.А. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // Генетика. 2010. Т. 46, № 2. С. 272–281.