VI РЕГИОНАЛЬНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ,
АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ
«ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ: ЦЕЛИ, РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ»

Пронькино, 25-27 октябрь 2011 г.

Идентификация характера решения одномерных рекуррентных уравнений с использованием дискретного преобразования Фурье

Константин Владимирович Шлюфман

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН

г. Биробиджан

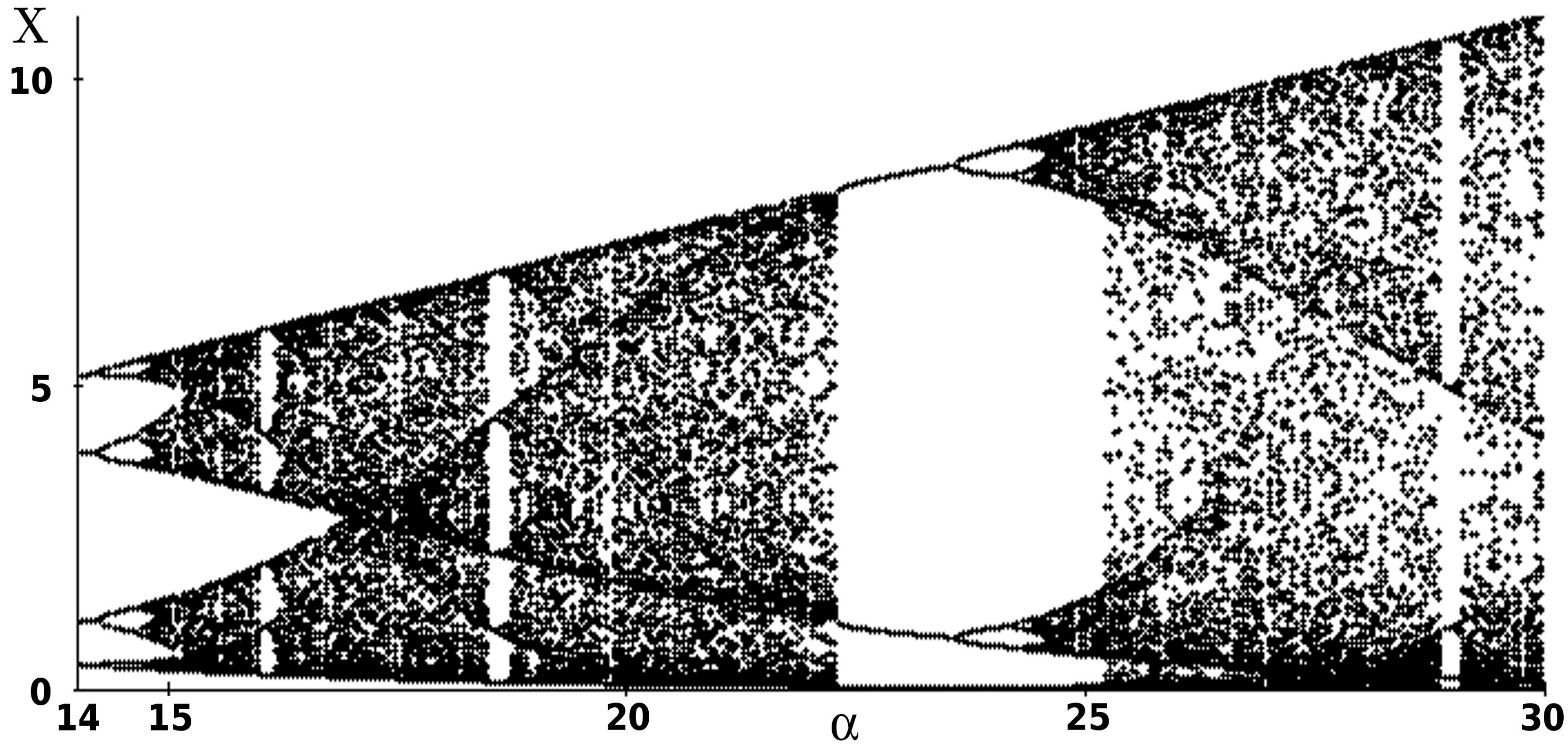
Актуальность

При изучении одномерных рекуррентных уравнений вида

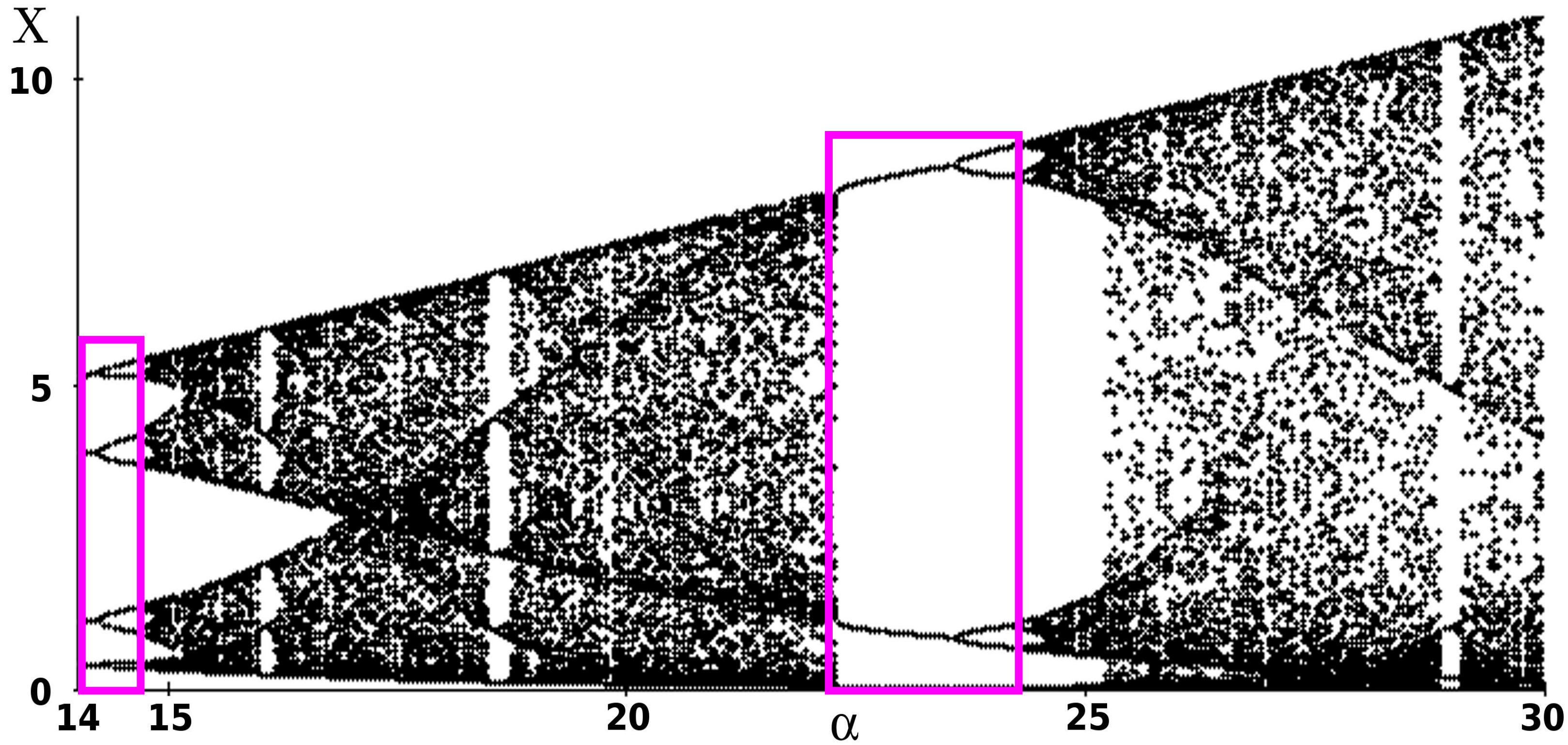
$$x_{n+1} = \mathrm{F}(a, x_n), \tag{1}$$

где x_n - значение решения $\{x_n\}$ на n-ой итерации, a - вектор-параметр, особое место занимает задача определения характера решения $\{x_n\}$ в пространстве параметров.

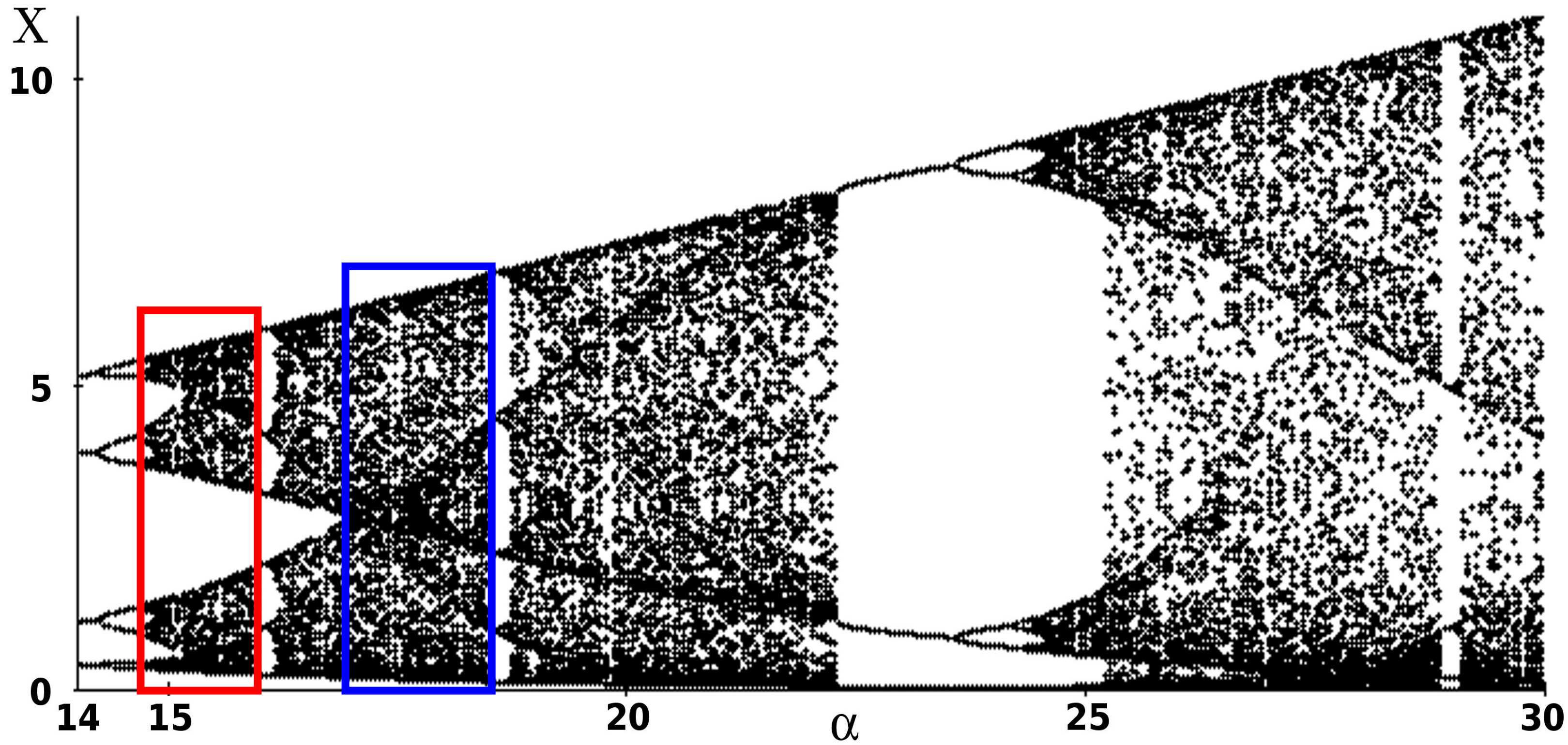
Бифуркационная диаграмма уравнения Рикера



Бифуркационная диаграмма уравнения Рикера



Бифуркационная диаграмма уравнения Рикера



Определение интервально-периодической динамики

Динамический режим системы будем называть интервально-периодическим, если существуют не менее двух взаимно непересекающихся интервалов состояний X_k, $k=\overline{1,l}$, $l \geq 2$, ($X_k \bigcap X_s = \varnothing$, $k \neq s$) и для любого натурального i можно установить соответствие $x_i \in X_s$, $s=\overline{1,l}$, то для любого натурального j выполняется $x_{i+j} \in X_s$, если $i+j \equiv i \pmod{l}$.

Цели

- Разработать алгоритм идентификации характера динамического режима одномерного рекуррентного уравнения

Задачи

- Выбор преобразования, образы которого сохраняют информацию о характере динамического режима.
- Исследование свойств образов преобразования, характеризующих динамические режимы.
- Выбор (или построение) статистического критерия идентификации динамических режимов по свойствам образов преобразования (характеризующих динамические режимы).

Дискретное преобразование Фурье. F-критерий идентификации режима.

Дискретное преобразование Фурье

$$I(f_k) = \left| \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot f_k \cdot n) \right|$$

$$f_k = \frac{k}{N}, \; k = 0, \ldots, \frac{N}{2}$$

F-критерий.

Если в динамике отсутствует циклическое слагаемое с частотой f_k, то величина $\frac{N \cdot I(f_k)^2}{4 \cdot s^2}$ имеет F-распределение с 2 и $N-3$ степенями свободы.

Свойства спектров периодических режимов

Периодическим режимам, и только им, соответствуют спектры, именуемые как линейчатые. Они имеют значения $I(f_k)$ отличные от нуля только на кратных частотах f_k.

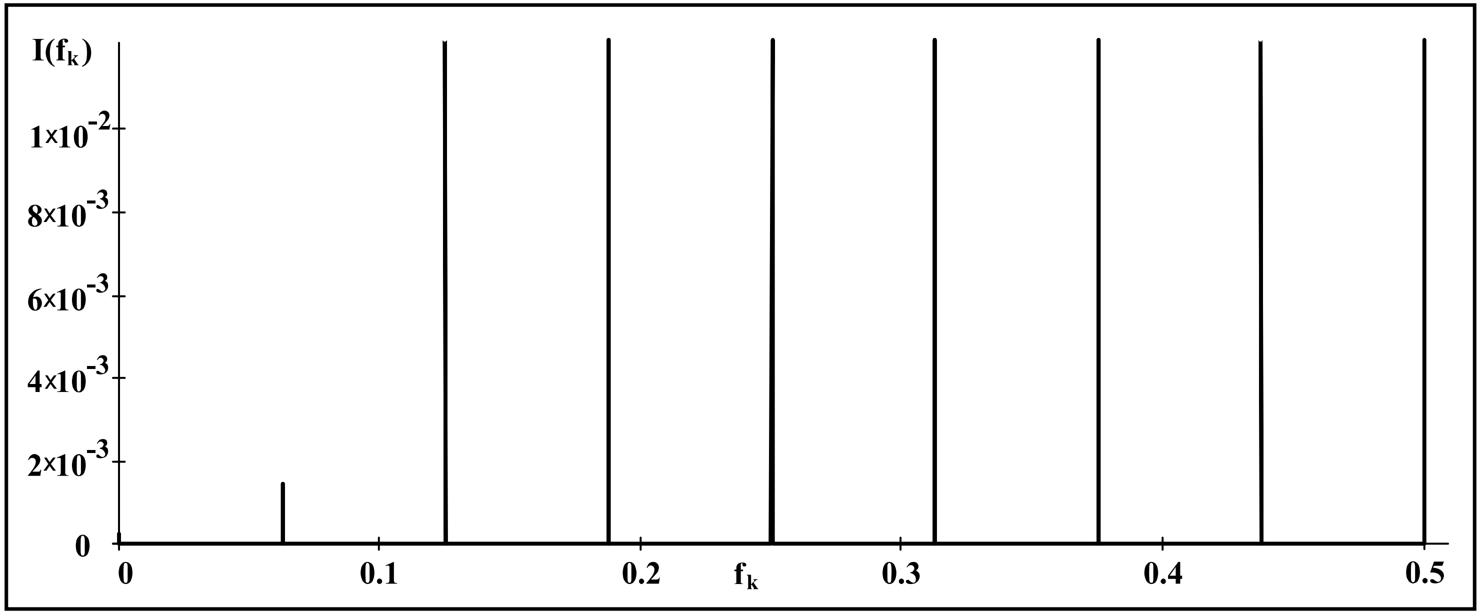
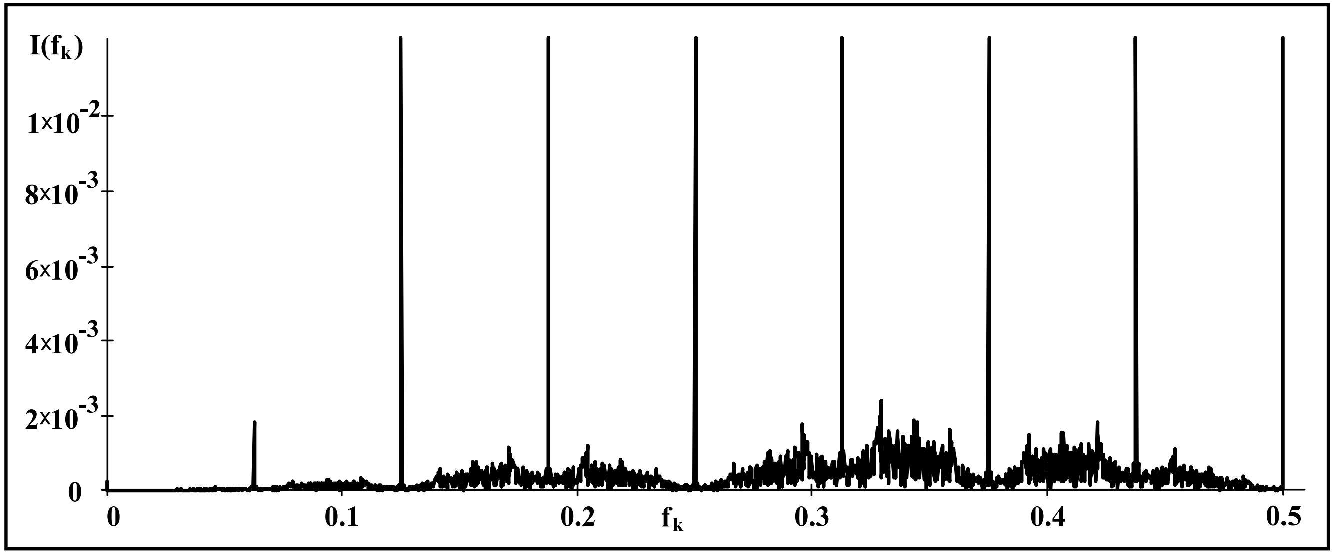


Рис.4. Линейчатый спектр фрагмента периодического решения уравнения Рикера при $a = 14.7$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Свойства спектров интервально-периодических режимов

Интервально-периодическим режимам, и только им, соответствуют спектры со статистически значимыми значениями $I(f_k)$ только на кратных частотах f_k.



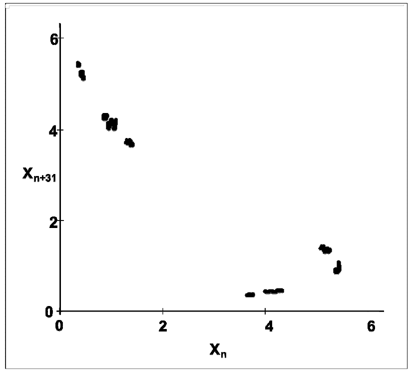
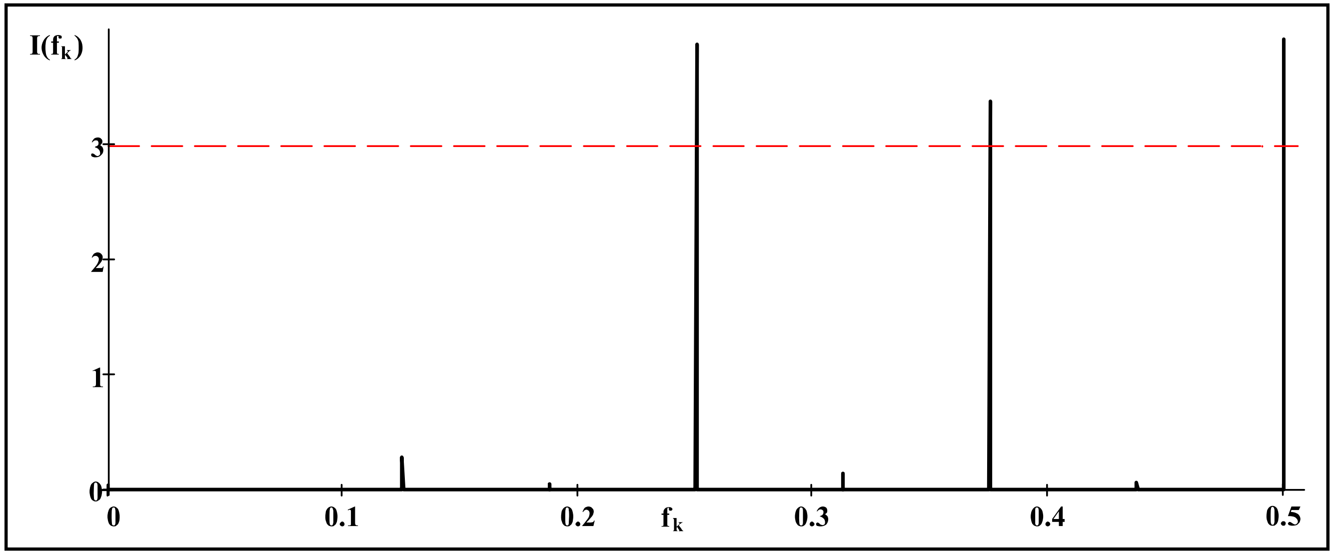


Рис.5. Спектр интервально-периодического решения уравнения Рикера при $a = 14.786$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Свойства спектров интервально-периодических режимов

Интервально-периодическим режимам, и только им, соответствуют спектры со статистически значимыми значениями $I(f_k)$ только на кратных частотах f_k.



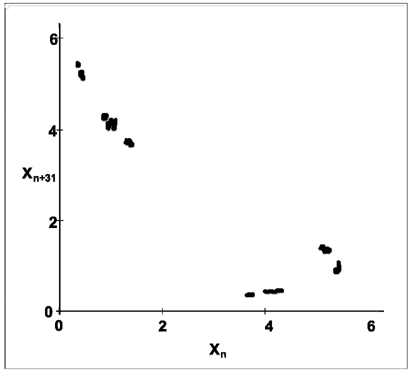
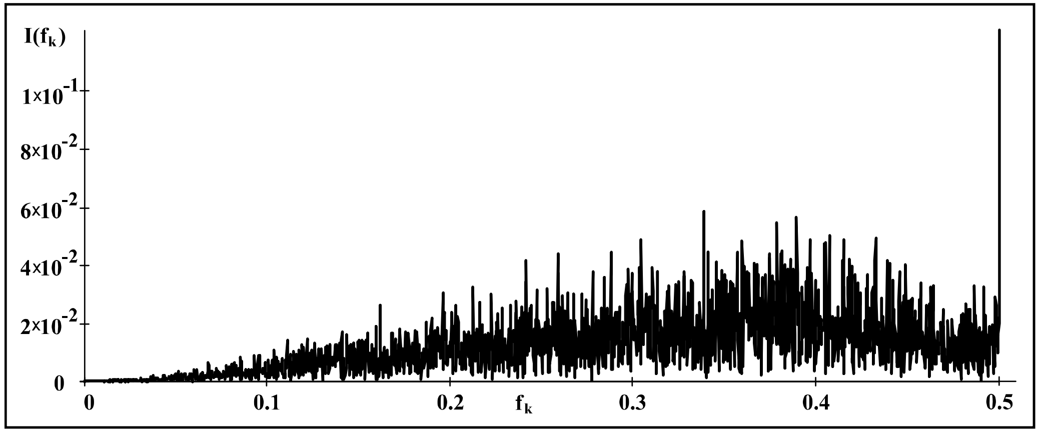


Рис.6. Значения статистики F-критерия спектр интервально-периодического решения уравнения Рикера при $a = 14.786$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Свойства спектров интервально-периодических режимов



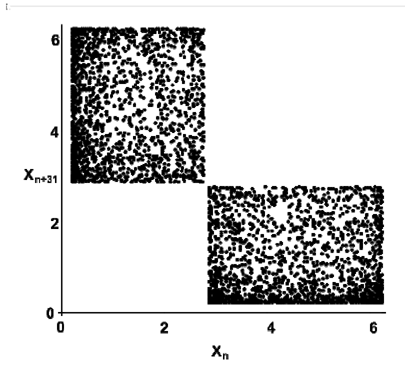


Рис.7. Спектр интервально-периодического решения уравнения Рикера при $a = 16.9$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

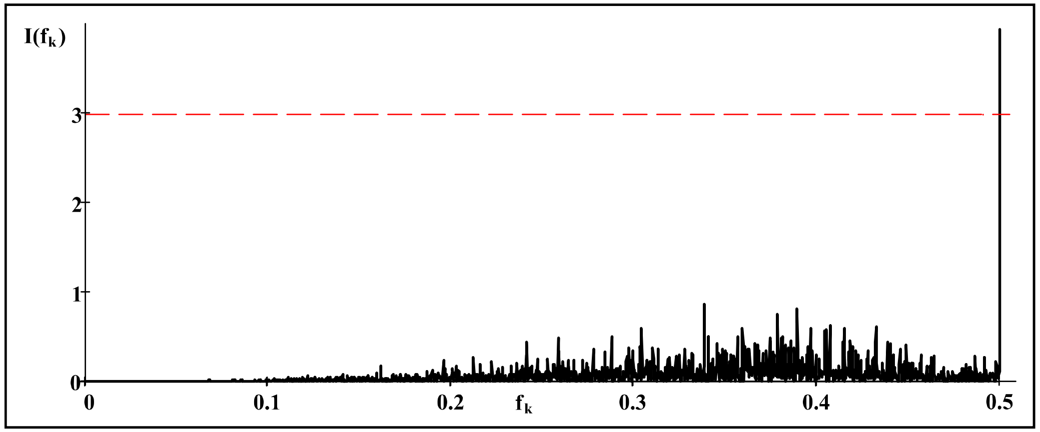
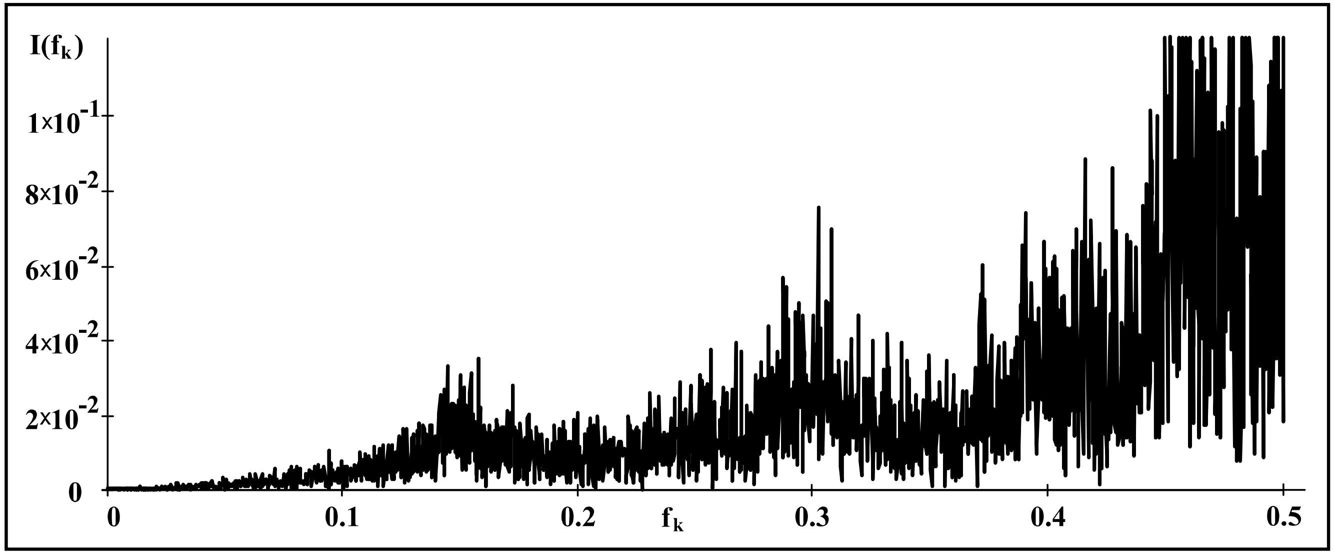


Рис.8. Значения статистики F-критерия спектра интервально-периодического решения уравнения Рикера при $a = 16.9$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Свойства спектров апериодических режимов

Динамическим режимам, не являющимся ни периодическими, ни интервально-периодическими, соответствуют спектры, либо со статистически незначимыми значениями $I(f_k)$, либо со статистически значимыми значениями $I(f_k)$ на частотах f_k, неудовлетворяющих условию кратности.



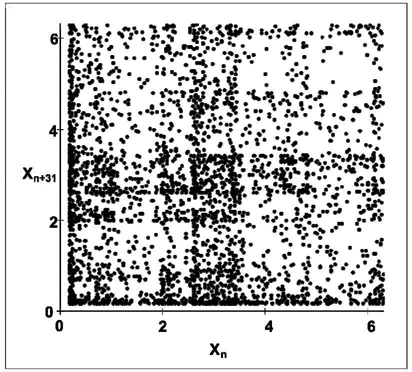
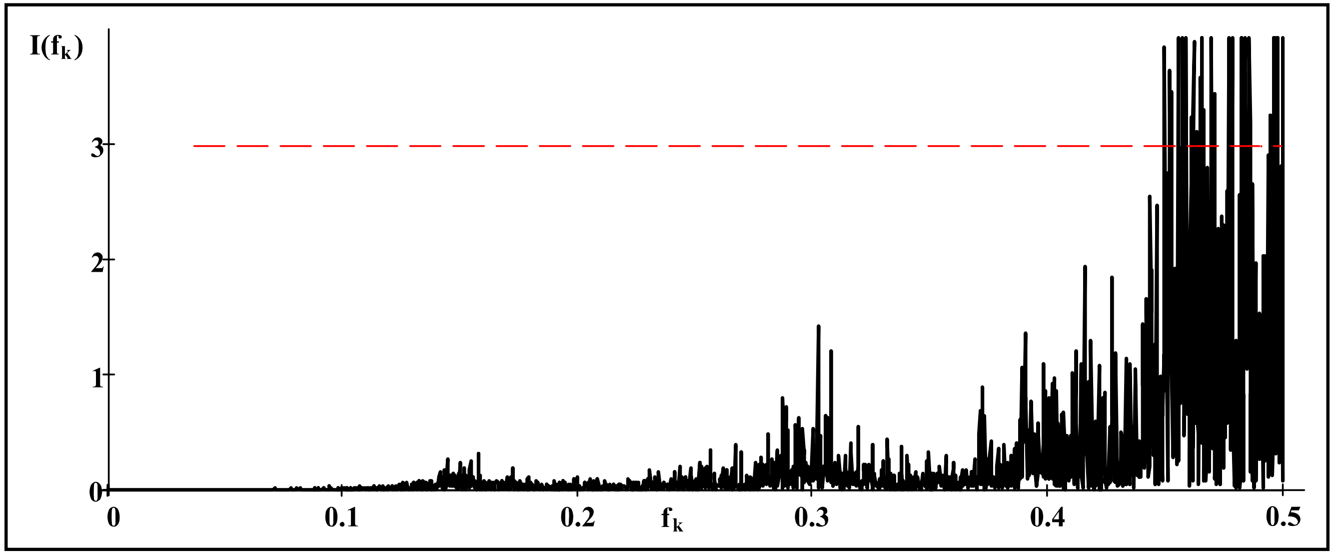


Рис.9. Спектр апериодического решения уравнения Рикера при $a = 17.6$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Свойства спектров апериодических режимов

Динамическим режимам, не являющимся ни периодическими, ни интервально-периодическими, соответствуют спектры, либо со статистически незначимыми значениями $I(f_k)$, либо со статистически значимыми значениями $I(f_k)$ на частотах f_k, неудовлетворяющих условию кратности.



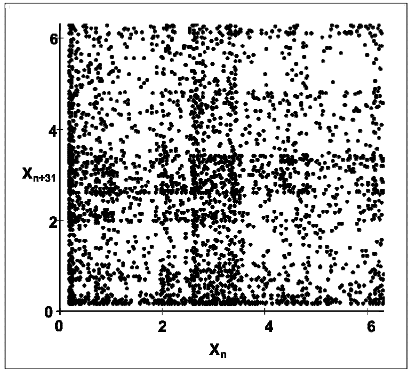
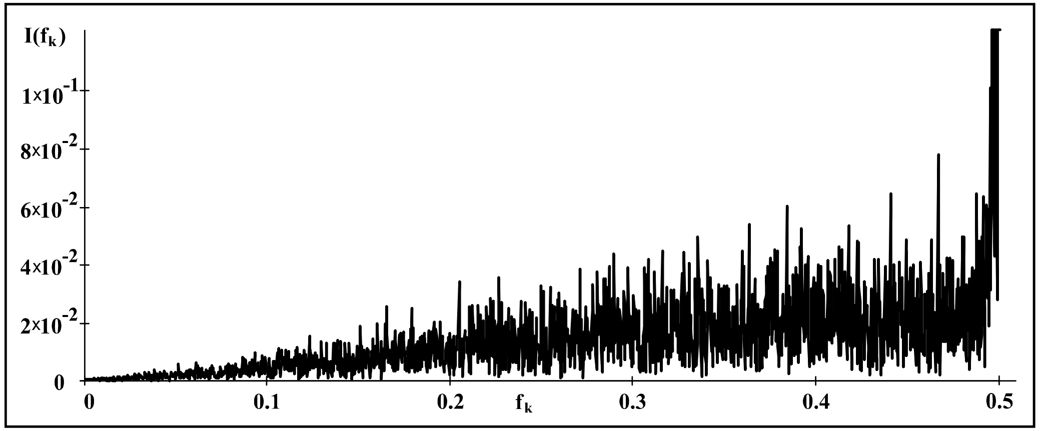


Рис.10. Значения статистики F-критерия спектра апериодического решения уравнения Рикера при $a = 17.6$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Свойства спектров апериодических режимов



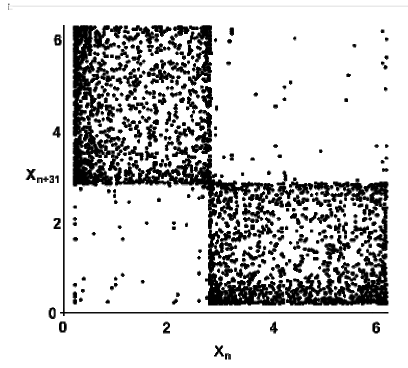


Рис.11. Спектр апериодического решения уравнения Рикера при $a = 17.0$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

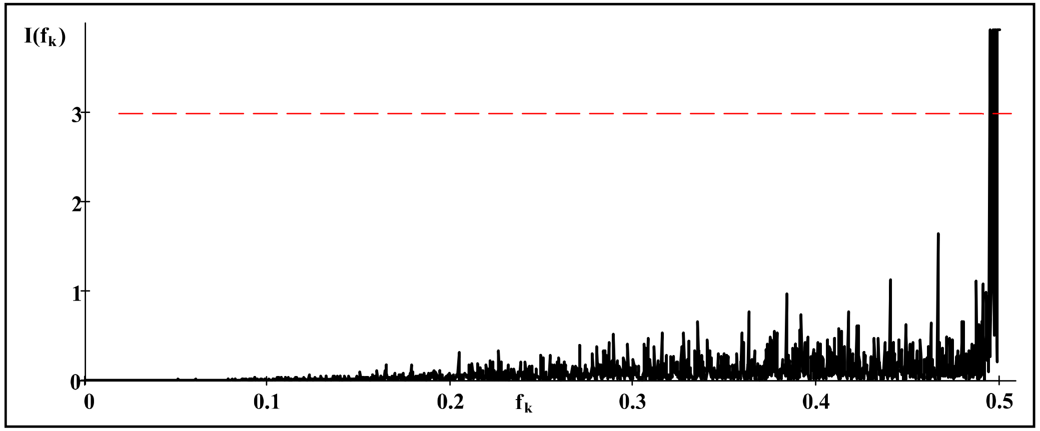


Рис.12. Значения статистики F-критерия спектра апериодического решения уравнения Рикера при $a = 17.0$. Длина фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Алгоритм идентификации характера решения одномерных рекуррентных уравнений

Этап 1. Вычисляется последовательность значений решения $\{x_n\}$ в объеме $N = \prod_i K_i^{l_i}$, где основания K_i и показатели l_i выбираются так, чтобы значение N было кратно всем представляющими интерес периодами периодических и интервально-периодических решений.

Этап 2. Выполняется дискретное преобразование Фурье и вычисляются значения спектра $I(f_k)$.

Этап 3. Проверяется справедливость гипотезы о периодическом характере решения. Для этого определяются частоты f_{k_j}, на которых значения спектра $I(f_k)$ отличны от нуля с вычислительной точностью. Проверяется кратность определенных частот f_{k_j}. В случае положительного результата гипотеза о периодическом характере решения считается справедливой и работа алгоритма окончена. В противном случае алгоритм переходит на следующий этап.

Алгоритм идентификации характера решения одномерных рекуррентных уравнений

Этап 4. Проверяется справедливость гипотезы о интервально-периодическом характере решения. Для этого определяются частоты f_{k_j}, на которых значения спектра f_{k_j} статистически значимы. Проверяется кратность определенных частот f_{k_j}. В случае положительного результата гипотеза о интервально-периодическом характере решения считается справедливой и работа алгоритма окончена. В противном случае считается, что характер решения нерегулярен.

Выводы:

Разработан алгоритм идентификации периодического, интервально-периодического и апериодического динамических режимов одномерных рекуррентных уравнений с использованием дискретного преобразования Фурье.

Недостатки метода:

- Не во всех случаях позволяет определить период периодического и интервально-периодического режима;
- Алгоритм идентифицирует характер динамического режима, период которого кратен длине фрагмента исследуемого решения.