РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт комплексного анализа региональных проблем

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ДВУХВОЗРАСТНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Оксана Леонидовна Ревуцкая
м.н.с. ИКАРП ДВО РАН

Задача

- Постановка и решение задачи оптимизации промыслового изъятия из двухвозрастной популяции для двухкомпонентной модели

Модель динамики численности двухвозрастной популяции с плотностным лимитированием молоди

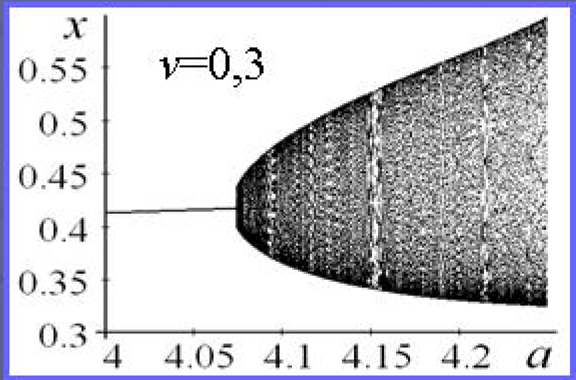
$$\begin{cases} X_{n+1} = aY_n \\ Y_{n+1} = s(X_n, Y_n)X_n + vY_n \end{cases} \qquad (1)$$

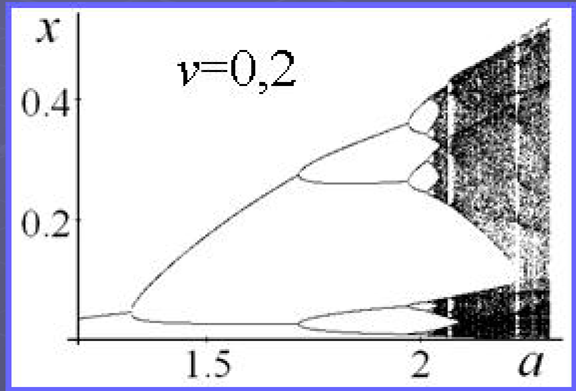
1) $s(X,Y) = 1 - \alpha X - \beta Y$

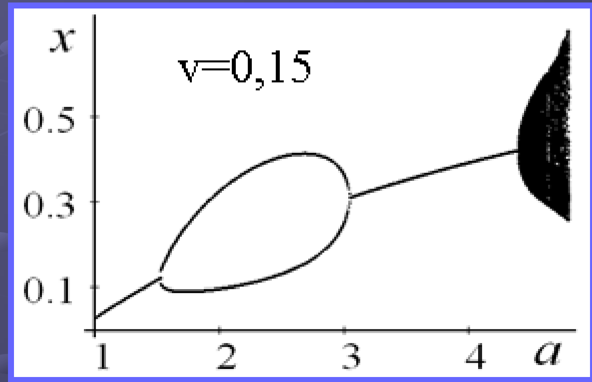
2) $s(X,Y) = \exp(-\alpha X - \beta Y)$

n – сезон размножения,
X* , *Y – численность младшего и старшего возрастных классов,
a – коэффициент рождаемости,
v – коэффициент выживаемости половозрелых особей,
α и ***β*** – коэффициенты, характеризующие интенсивности конкурентного воздействия неполовозрелых и половозрелых особей,
ρ = β/ α, αX→x, αY→y, после которой новые переменные представляют собой «относительные» численности популяции

Бифуркационные диаграммы динамической переменной *x* при вариации параметра *a*







ρ=4

ρ =10

ρ =4

Задача оптимизации промысла двухвозрастной популяции

$$\begin{cases} x_{n+1} = a y_n (1 - u_1) \\ y_{n+1} = \left(s(x_n, y_n) x_n + v y_n\right)(1 - u_2) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

u_1 , u_2 – доля изымаемых особей из соответствующей возрастной группы

Равновесный ежегодный доход от промысла

$$I = c_1 a \bar{y} u_1 + c_2 \left(s(\bar{x}, \bar{y}) \bar{x} + v \bar{y}\right) u_2 \qquad \textbf{(3)}$$

c_1 , c_2 - средние цены особей младшей и старшей возрастных групп

Критерий оптимизации стационарного дохода

$$c_1 a \bar{y} u_1 + c_2 \left(s(\bar{x}, \bar{y}) \bar{x} + v \bar{y}\right) u_2 \to \max$$

при условии $0 \le u_1 \le 1$, $0 \le u_2 \le 1$, $x > 0$, $y > 0$

1) $s(x, y) = 1 - x - \rho y$

2) $s(x, y) = \exp(-x - \rho y)$

Оптимизация промысла при одновременном изъятии части неполовозрелых и половозрелых особей

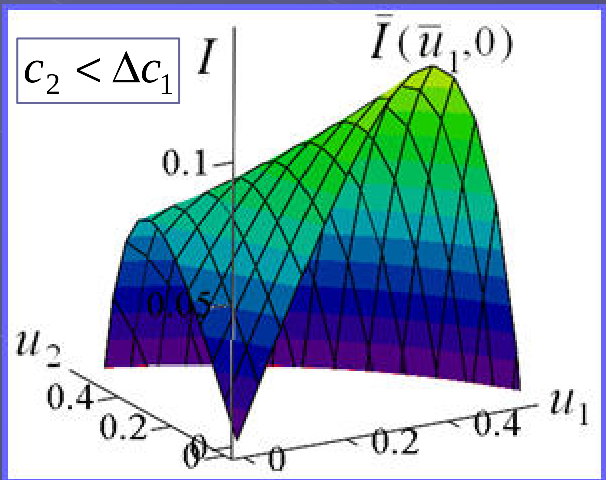
$$I(u_1,u_2)=I_1+I_2=c_1(a\bar{y})u_1+c_2\big((1-\bar{x}-\rho\bar{y})\bar{x}+v\bar{y}\big)u_2$$

$\bar{x},\bar{y}$ - стационарные значения численностей младшей и старшей возрастной группы соответственно системы (2)

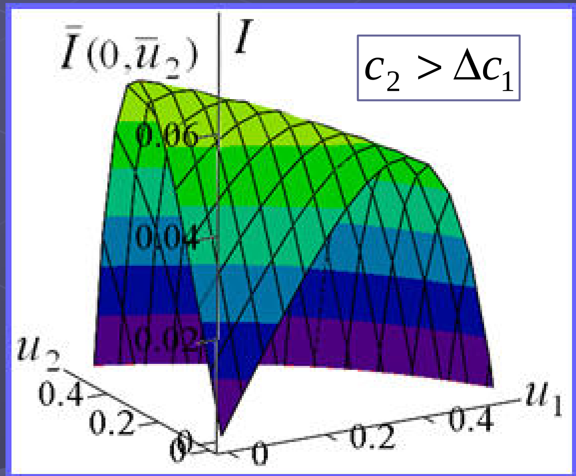
$$\bar{I}=\max\{\bar{I}_2,\bar{I}_1\}=\frac{1}{4}\frac{(a+v-1)^2}{a(a+\rho)}\max\{c_2,\Delta c_1\},\qquad \Delta=\frac{4a(a+\rho)(\mathrm{M}-a(a+\rho))((1-v)(1+\rho-v)-\mathrm{M})}{(a+v-1)^2(a(1-v)+\mathrm{M})((a+\rho)(1+\rho-v)+\mathrm{M})}$$

$$\mathrm{M}=(a(1-v)(1+q-v)(a+q))^{1/2}$$

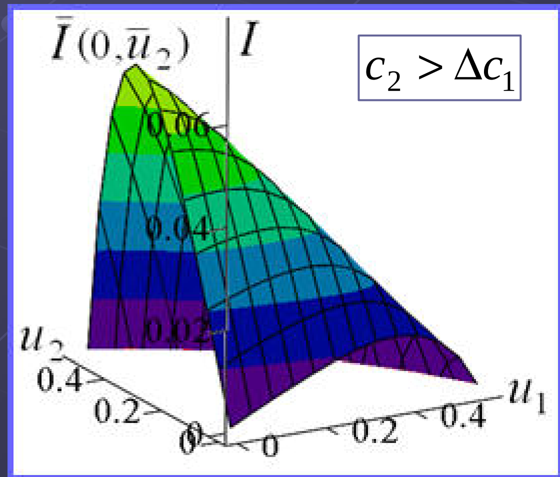
Поверхности функции промысла $I(u_1,u_2)$ при a=1.8, ρ=0.5, v=0.2



c_1=1, c_2=1



c_1=0.4, c_2=1



c_1=0.1, c_2=1

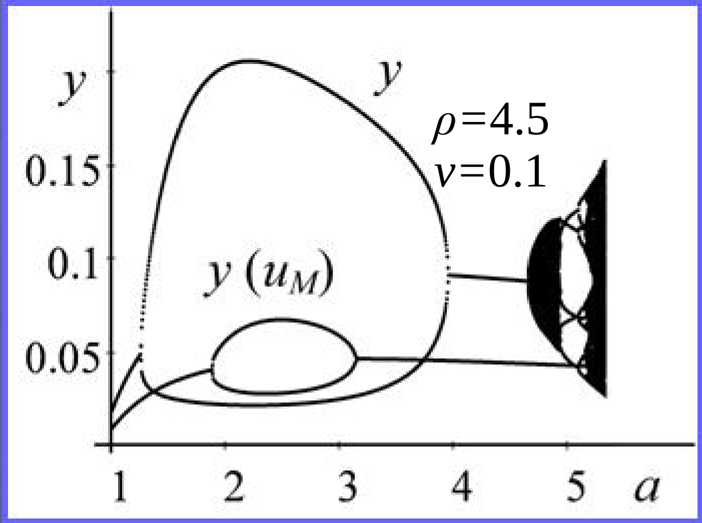
Промысел из половозрелой части популяции

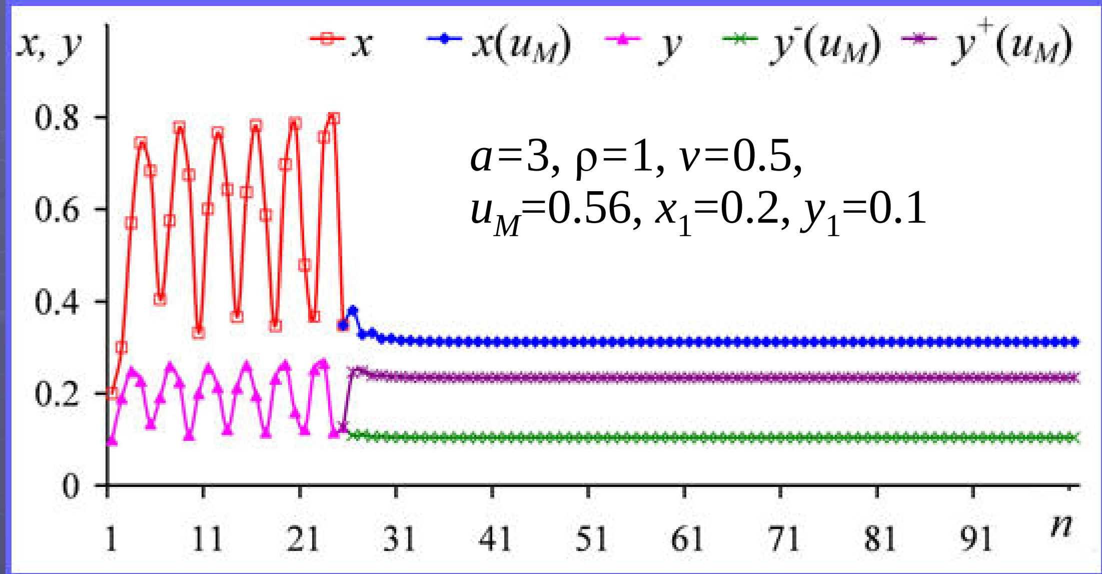
	$s(x,y)=1-x-\rho y$	$s(x,y)=\exp(-x-\rho y)$
Равновесные значения численностей	$\bar{x}_M = \dfrac{a+v-1}{2(a+\rho)}, \quad \bar{y}_M = \dfrac{a+v-1}{2a(a+\rho)}$	$a = \dfrac{(1-v)\exp((a+\rho)\bar{y}_M)}{1-(a+\rho)\bar{y}_M}, \quad \bar{x}_M = a\bar{y}_M$
Оптимальная доля изъятия половозрелых особей	$\bar{u}_2 = \dfrac{a+v-1}{a+v+1}$	$\bar{u}_2 = 1 - \dfrac{1-(a+\rho)\bar{y}_M}{1-(a+\rho)v\bar{y}_M}$
Максимальный стационарный промысел	$R_M(\bar{u}_2) = \dfrac{(a+v-1)^2}{4a(a+\rho)}$	$R_M(\bar{u}_2) = \dfrac{(1-v)(a+\rho)\bar{y}_M^2}{1-(a+\rho)\bar{y}_M}$

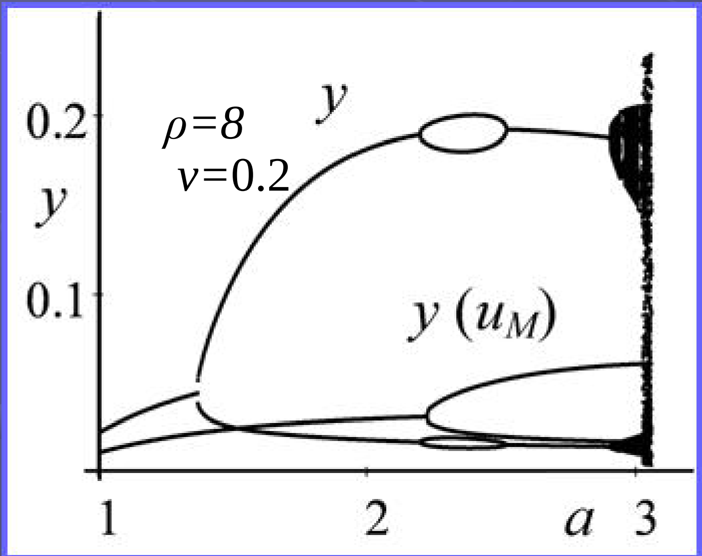
Условие устойчивости $v < (1-a)(a-\rho)/(5a+3\rho)$

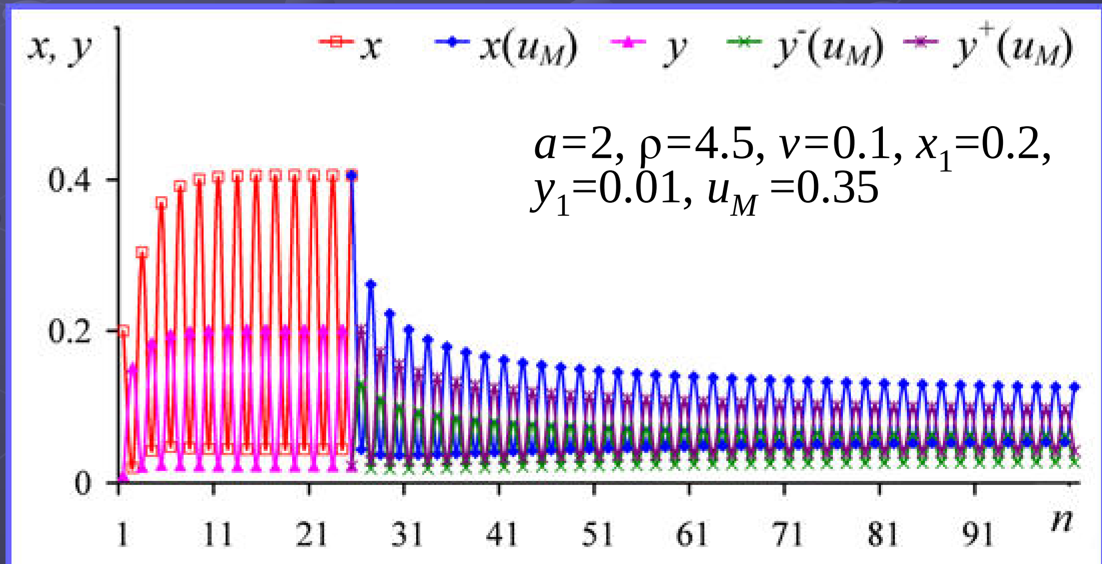
Существует такая область значений популяционных параметров, при переходе в которую равновесие теряет устойчивость и появляются 2-циклы, не смотря на ведение промысла с постоянной долей изъятия.

Изменение численностей молоди и взрослых особей без управления (x, y), до промысла ($x(u_M)$, $y^+(u_M)$) и после промысла ($x(u_M)$, $y^-(u_M)$)









Промысел из неполовозрелой части популяции

Равновесные значения численностей

$$\bar{x}_M = \frac{\mathrm{M} + (a+\rho)(v-1)}{\rho(a+\rho)}, \quad \bar{y}_M = \frac{(1+a+\rho-v)((1-v)(1+\rho-v)-\mathrm{M})}{(a(v-1)-\mathrm{M})((a+\rho)(1+\rho-v)+\mathrm{M})},$$

где $\mathrm{M} = (a(1-v)(1+\rho-v)(a+\rho))^{1/2}$

Оптимальная доля изъятия неполовозрелых особей

$$u_1 = \frac{a(a+\rho)-\mathrm{M}}{a(1+a+\rho-v)}$$

Ежегодный максимальный доход от изъятия

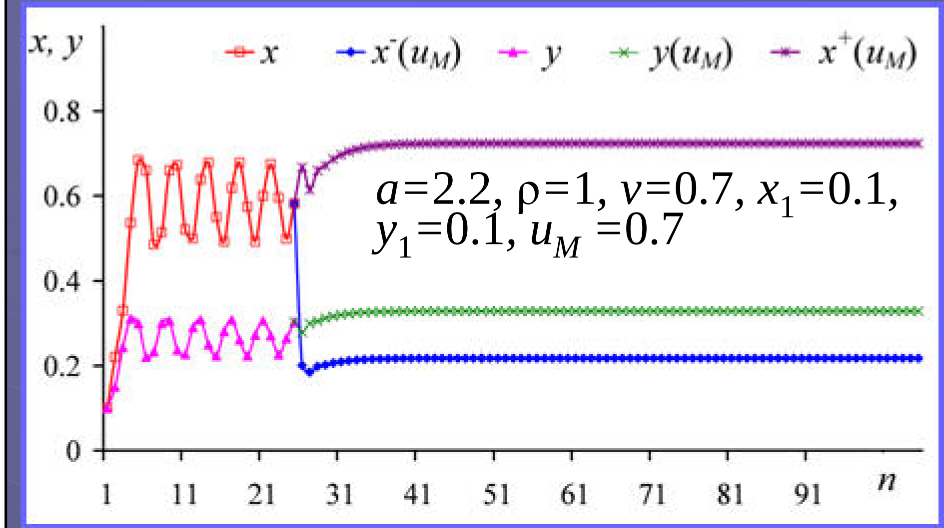
$$R_M(u_1) = \frac{(\mathrm{M}-a(a+\rho))((1-v)(1+\rho-v)-\mathrm{M})}{(a(1-v)+\mathrm{M})((a+\rho)(1+\rho-v)+\mathrm{M})}$$

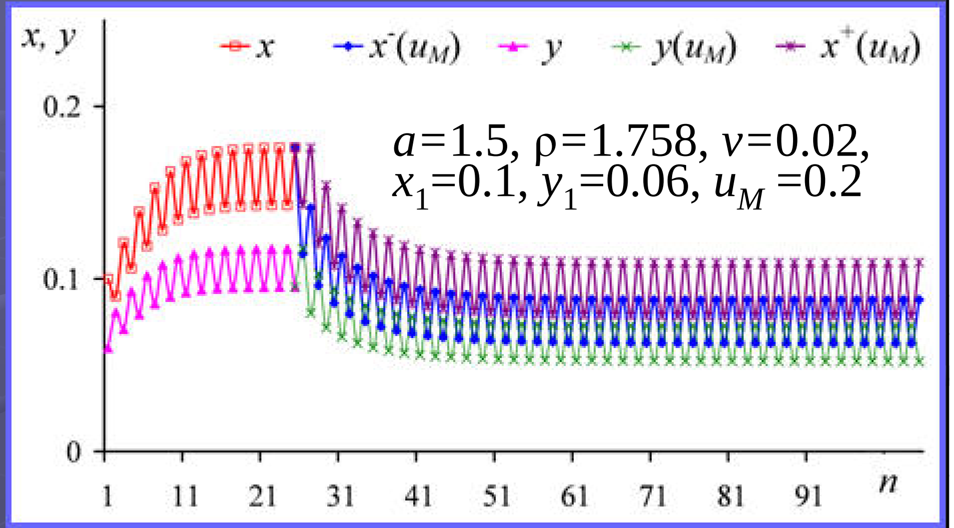
Граница устойчивости:

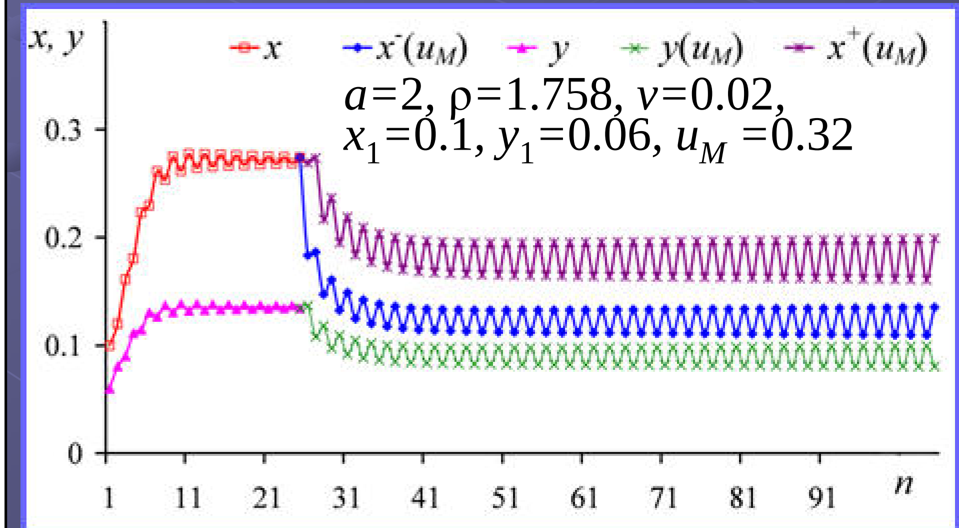
$$a_{1,2} = \frac{\rho(1+v)}{v-3} - \frac{(v-1)(1+\rho-v)(3+\rho-v)(\rho-10v+3(v^2-\rho v+1)\pm G)}{2((v-1)(1+\rho-v)+4)((v-2)(v-\rho-2)+(\rho-1))},$$

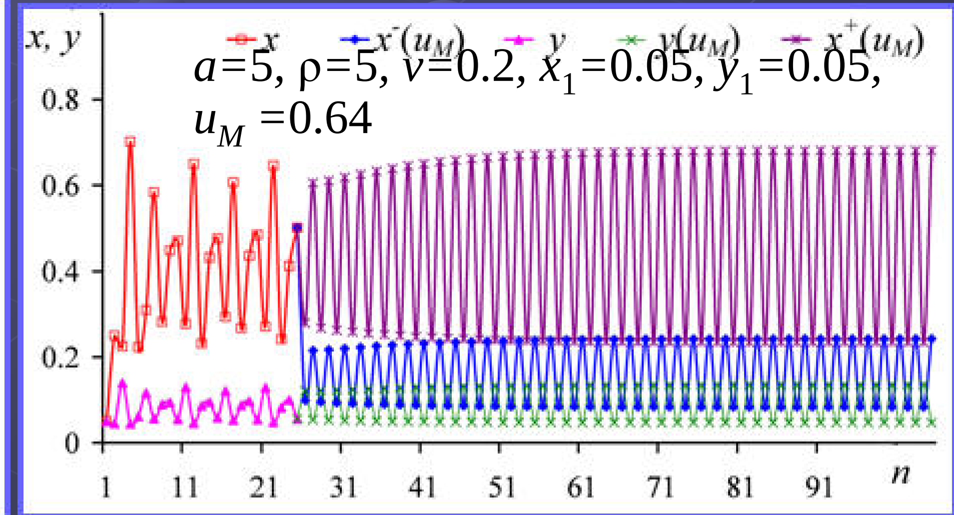
$$G = ((\rho-3v-1)^2 - 4v(3+\rho))^{1/2}$$

Изменение численностей молоди и взрослых особей без управления (x, y), до промысла ($x^+(u_M)$, $y(u_M)$) и после промысла ($x^-(u_M)$, $y(u_M)$)









Оптимальная стратегия промысла из половозрелой части популяции

x_M , y_M – численности младшей и старшей возрастной группы соответственно, при которых осуществляется максимальный прирост популяции

$$\begin{cases} V_n^* = y_n - y_M & при \quad y_n \ge y_M \\ V_n^* = 0 & при \quad y_n < y_M \end{cases}$$

V – количество отбираемых особей

Вариант 1. $x_1=x_M$, $y_1 \ge y_M$

$s(x,y)=1-x-\rho y$

$s(x,y)=\exp(-x-\rho y)$

Величина максимального суммарного урожая V за n лет, где $n=1,2,\ldots,N$

$$\hat{V}_n = y_1 + \frac{(n-1)}{4}\frac{(a+v-1)^2}{a(a+\rho)}$$

$$\hat{V}_n = y_1 + \frac{(n-1)(1-v)(a+\rho)y_M^2}{1-(a+\rho)y_M}$$

Ежегодный урожай при оптимальном режиме эксплуатации

$$\bar{V} = \frac{(a+v-1)^2}{4a(a+\rho)}$$

$$\bar{V} = \frac{(1-v)(a+\rho)y_M^2}{1-(a+\rho)y_M}$$

$$\bar{V} = R_M(\bar{u}_2)$$

Оптимальная стратегия промысла из половозрелой части популяции

Вариант 2. $x_1 > x_M$, $y_1 > y_M$

Величина максимального суммарного урожая за n лет, где $n=1,2,\ldots,N$

$s(x,y)=1-x-\rho y$

$$\tilde{V}_n = y_1 + y_M(v-1-\rho x_1) + x_1 - x_1^2 + \frac{(s-1)(a+v-1)^2}{4a(a+\rho)}$$

$s(x,y)=\exp(-x-\rho y)$

$$\tilde{V}_n = y_1 + (v-1)y_M + x_1\exp(-x_1-\rho y_M) + \frac{(s-1)(1-v)(a+\rho)y_M^2}{1-(a+\rho)y_M}$$

$$s = t-1 \qquad t = 2,\ldots,n$$

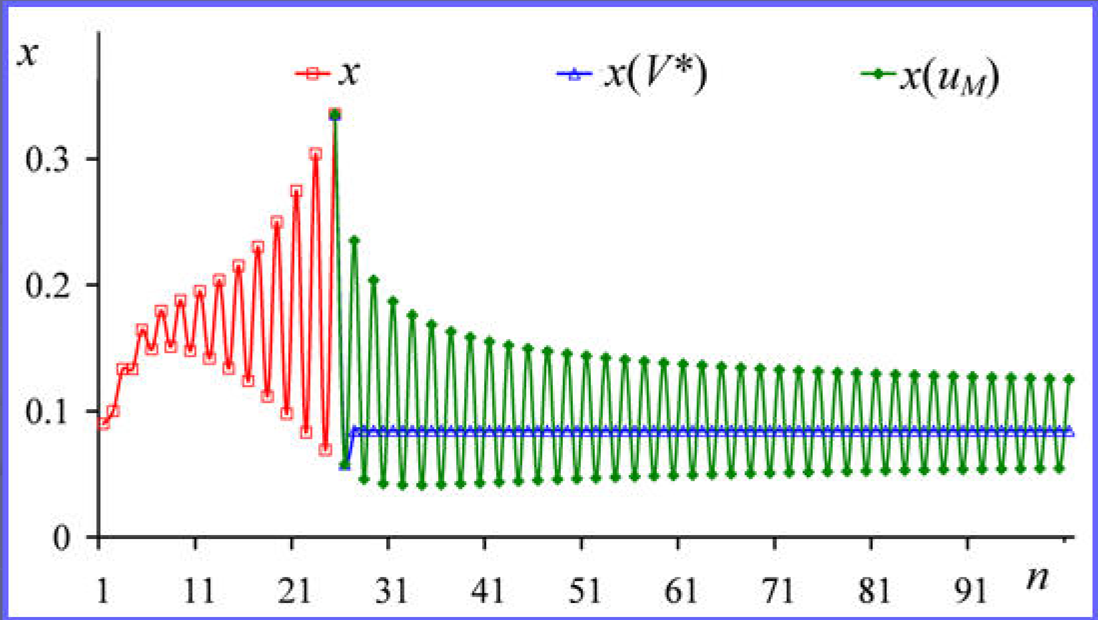
Вариант 3. $x_1 < x_M$, $y_1 < y_M$ или $x_1 < x_M$, $y_1 > y_M$ или $x_1 > x_M$, $y_1 < y_M$

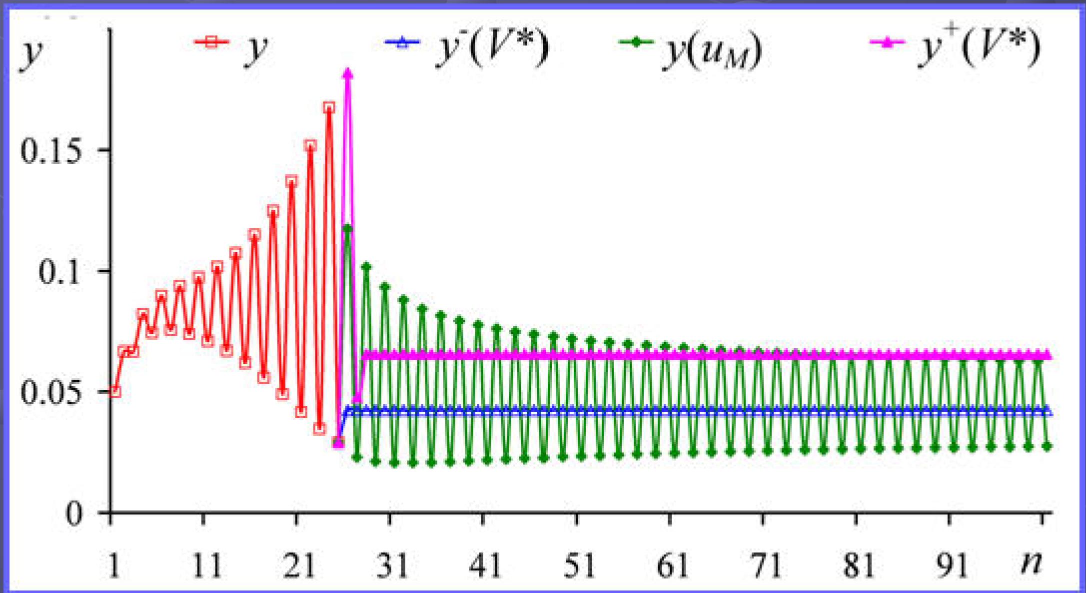
$$\tilde{V}_n = \sum_{n=1}^{N-1}(y_n - y_M) + y_N = \sum_{n=1}^{N-1}\left[H(y_n - y_M)(y_n - y_M)\right] + y_N$$

где

$$H(y_n - y_M) = \begin{cases} 1, & y_n > y_M \\ 0, & y_n \le y_M \end{cases}$$

Оптимальная стратегия промысла из половозрелой части популяции





Изменение численностей молоди и взрослых особей без управления (x, y), до промысла ($x(V^*)$, $y^+(V^*)$) и после промысла ($x(V^*)$, $y^-(V^*)$), ($x(u_M)$, $y^-(u_M)$)

a=2, ρ=4.5, v=0.1,
x_1=0.09, y_1=0.05, u_M=0.35

Оптимальная стратегия промысла из неполовозрелой части популяции при $s(x,y)=1-x-\rho y$

x_M , y_M – численности младшей и старшей возрастной группы соответственно, при которых осуществляется максимальный прирост популяции

$$\begin{cases} V_n^* = x_n - x_M \quad при \quad x_n \ge x_M \\ V_n^* = 0 \qquad\qquad при \quad x_n < x_M \end{cases}$$

V – количество отбираемых особей

Величина максимального суммарного урожая V за n лет, где $n=1,2,\ldots,k$, при $x_1 \ge x_M$, $y_1 = y_M$

$$V^{€}_n = x_1 + (n-1)\frac{(\mathrm{M} - a(a+\rho))((1-v)(1+\rho-v)-\mathrm{M})}{(a(1-v)+\mathrm{M})((a+\rho)(1+\rho-v)+\mathrm{M})}$$

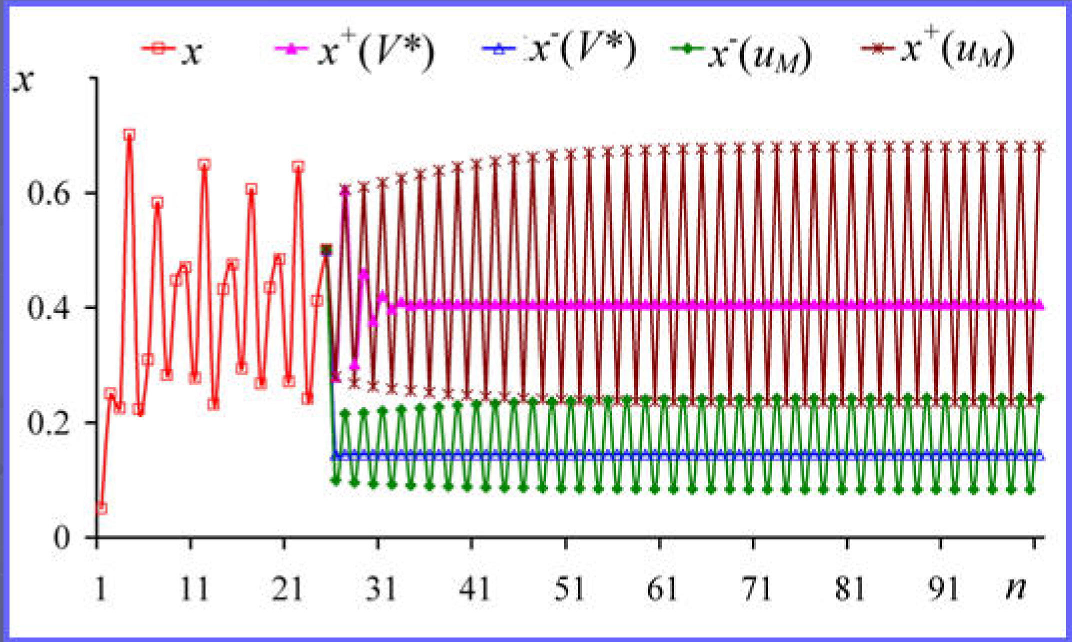
где $\quad \mathrm{M} = (a(1-v)(1+q-v)(a+q))^{1/2}$

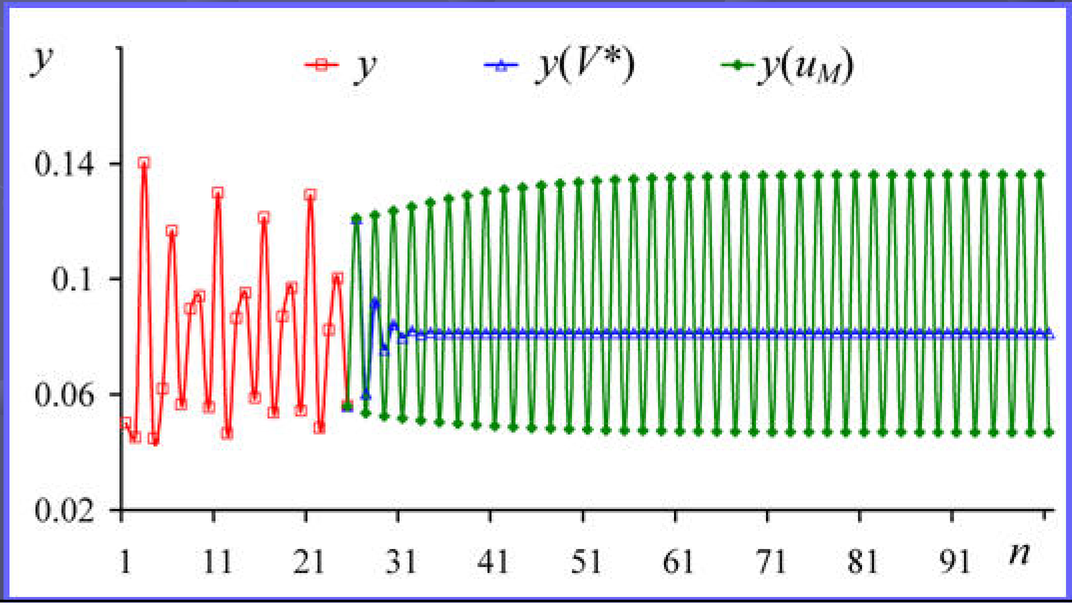
Ежегодный урожай при оптимальном режиме эксплуатации

$$\overline{V} = \frac{(\mathrm{M} - a(a+\rho))((1-v)(1+\rho-v)-\mathrm{M})}{(a(1-v)+\mathrm{M})((a+\rho)(1+\rho-v)+\mathrm{M})}$$

$$\overline{V} = R_M(\overline{u}_1)$$

Оптимальная стратегия промысла из неполовозрелой части популяции





Изменение численностей молоди и взрослых особей без управления (x, y), до промысла ($x^+(V^*)$, $y(V^*)$), ($x^+(u_M)$, $y\,(u_M)$) и после промысла ($x^-(V^*)$, $y(V^*)$), ($x^-(u_M)$, $y\,(u_M)$)

a=5, ρ=5, v=0.2, x_1=0.05, y_1=0.05, u_M =0.64

Основные выводы

- 1. Решена задача оптимизации равновесного промысла для двухвозрастной популяции при плотностном лимитировании молоди.
- 2. Показано, что оптимальным является изъятие из одного возрастного класса, а какого именно определяется значениями популяционных параметров и соотношением цен. Получены аналитические формулы для расчета оптимальных равновесных долей изъятия и значений численностей, обеспечивающих максимальный прирост популяции.
- 3. Показано, что промысел из двухвозрастной популяции с постоянной оптимальной равновесной долей изъятия при определенных значениях популяционных параметров приводит к колебаниям численности. Стабилизация динамики системы происходит при стратегии промысла, основанной в регулярном изъятии излишка численности над значением, соответствующего величине максимального прироста популяции.

Спасибо за внимание!