

# **Нахождение максимального потока в сетях с ограниченными пропускными способностями дуг**

ФГБОУ ВПО «ДВГСГА», 3 курс  
Факультет «Математики,  
информационных технологий и техники»  
Хабибулина Татьяна Васильевна

**Задача о максимальном потоке** - поиск способа пересылки максимального количества единиц потока из одного пункта в другой при условии отсутствия превышения пропускных способностей дуг исходного графа.

**Сеть  $G$**  - пара  $(D, \psi)$ , где  $D$  — ориентированный граф (или орграф), а  $\psi$  — функция, отображающая множество дуг орграфа  $D$  во множество неотрицательных действительных чисел.

**Источник**  $s$  – вершина, из которой начинается перемещение объектов.

**Сток**  $t$  - вершина, в которой заканчивается перемещение объектов.

**Пропускная способность дуги**  $(x, y)$  - функция  $c(x, y)$ , определенная на множестве дуг и ставящая в соответствие каждой дуге действительное неотрицательное число.

**Поток**  $N(D, \psi)$  для сети  $(D, \psi)$  - неотрицательная действительная функция  $\varphi$ , сопоставляющая каждой дуге  $(x, y)$  неотрицательное действительное число  $\varphi(x, y)$  так, что удовлетворяются условия:

**1. Ограничение по пропускной способности:**

$\varphi(x, y) \leq c(x, y)$  для любой дуги  $(x, y)$  в  $G$

**2. Сохранение:**

$$\sum_{y \in R} \varphi(x, y) = \sum_{y \in R} \varphi(y, x) \text{ для всех } x, \text{ кроме } x \neq s, t$$

**Единицы потока** - объекты, которые перемещаются из источника в сток.

**Увеличивающие дуги** (множество  $I$ ) - дуги, в которых поток может увеличиваться.

$c_I(x, y)$  - максимальная величина, на которую может быть увеличен поток в дуге  $(x, y)$ .

**Уменьшающие дуги** (множество  $R$ ) - дуги, в которых поток может уменьшаться.

$c_R(x, y)$  - максимальная величина, на которую может быть уменьшен поток в дуге  $(x, y)$ .

**Множество дуг  $N$**  – дуги, в которых поток не может ни увеличиваться, ни уменьшаться.

**Промежуточные дуги** – дуги, принадлежащие как множеству  $I$ , так и множеству  $R$ .



# Алгоритм поиска максимального потока

## Шаг 1. Задание начальных условий.

### 1. Сохранение:

$$\sum_{y \in X} \varphi(x, y) - \sum_{y \in X} \varphi(y, x) = 0, (x \neq s, x \neq t)$$

### 2. Ограничение пропускной способности:

$$0 \leq \varphi(x, y) \leq c(x, y), (x, y) \in A$$

### 3. Сохранение суммарного числа единиц потока:

$$\sum_{y \in X} \varphi(x, y) - \sum_{y \in X} \varphi(y, s) = v$$

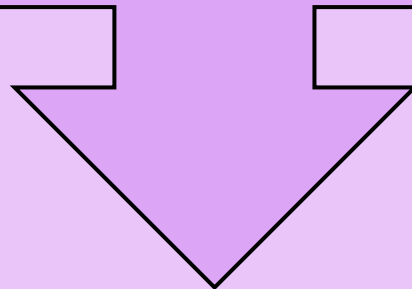
$$\sum_{y \in X} \varphi(y, t) - \sum_{y \in X} \varphi(t, y) = v$$

**Шаг 2. Создание множеств  $I$  и  $R$ .**

**Определение  $c_I(x, y)$ ,  $c_R(x, y)$ .**

$$\varphi(x, y) < c(x, y) \Rightarrow c_I(x, y) = c(x, y) - \varphi(x, y), (x, y) \in I$$

$$0 < \varphi(x, y) < c(x, y) \Rightarrow c_R(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in R$$

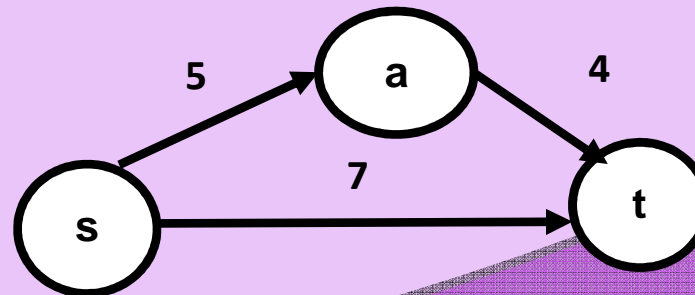
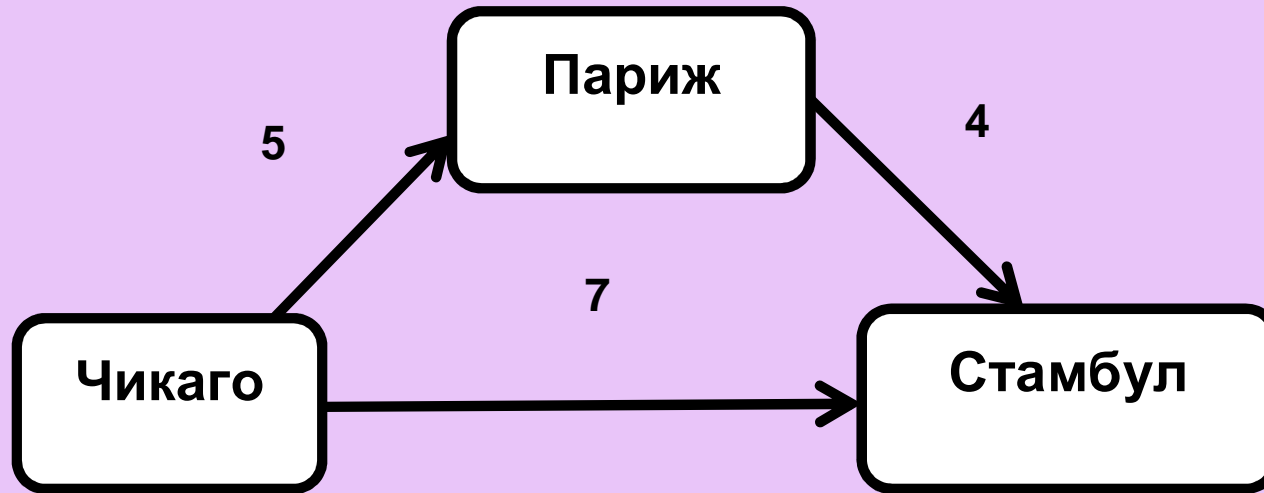


**Шаг 3. Поиск увеличивающей цепи.**

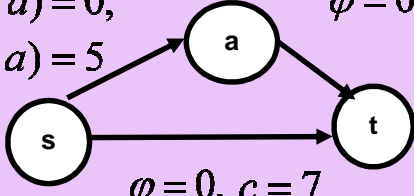
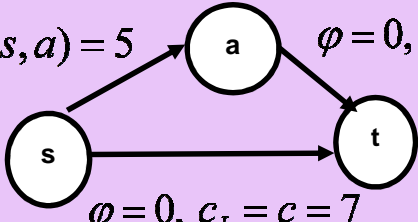
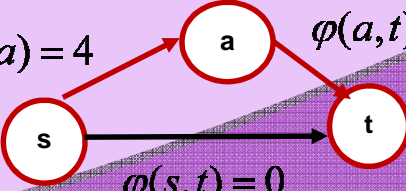
## Применение алгоритма поиска максимального потока

Представитель бюро путешествий должен в один из дней организовать перелет десяти туристов из Чикаго в Стамбул. Имеется семь свободных мест на прямой рейс Чикаго-Стамбул, пять – на рейс Чикаго-Париж и четыре – на рейс Париж-Стамбул. Как должен действовать представитель этого бюро?

# Сеть, соответствующая условию задачи



# Выполнение алгоритма поиска максимального потока

I итерация		
I шаг	$\varphi(x, y) = 0$ , для всех дуг $(x, y)$	$\varphi(s, a) = 0,$ $c(s, a) = 5$ $\varphi = 0, c = 4$ 
II шаг	Так как $\varphi(x, y) < c(x, y) \Rightarrow$ $\forall (x, y) \in I \Rightarrow$ $c_I(x, y) = c(x, y) - \varphi(x, y) = c(x, y)$	$\varphi(s, a) = 0,$ $c_I(s, a) = c(s, a) = 5$ $\varphi = 0, c_I = c = 4$ 
III шаг	Берем цепь $(s, a), (a, t)$ . Максимальное увеличение потока: $\min\{c_I(s, a), c_I(a, t)\} = \min\{5, 4\} = 4$ $\Rightarrow$ $\varphi(s, a) = 4; \varphi(a, t) = 4; \varphi(s, t) = 0$ . Возвращаемся к шагу II.	$\varphi(s, a) = 4$ $\varphi(a, t) = 4$ $\varphi(s, t) = 0$ 

## II итерация

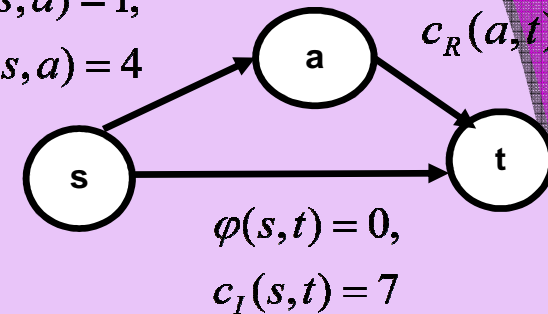
### II шаг

Пересчитываем величины  $c_I(x, y)$  и  $c_R(x, y)$ , корректируем состав множеств  $I$  и  $R$ .

$c(s, a) = 5$ $\varphi(s, a) = 4 < c(s, a)$	$(s, a) \in I$ $(s, a) \in R$	$c_I(s, a) = 1$ $c_R(s, a) = 4$
$c(a, t) = 4$ $\varphi(a, t) = 4 = c(a, t)$	$(a, t) \notin I$ $(a, t) \notin R$	$c_R(a, t) = 4$
$c(s, t) = 7$ $\varphi(s, t) = 0 < c(s, t)$	$(s, t) \in I$ $(s, t) \notin R$	$c_I(s, t) = 7$

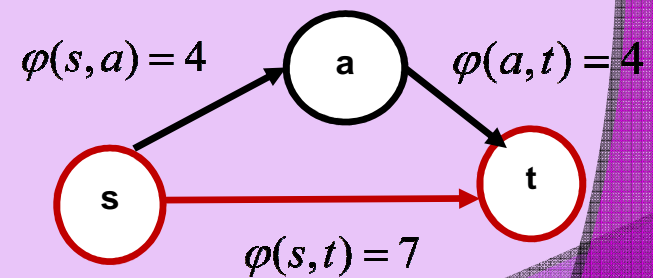
$$\begin{aligned} \varphi(s, a) &= 4, \\ c_I(s, a) &= 1, \\ c_R(s, a) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a, t) &= 4, \\ c_R(a, t) &= 4 \end{aligned}$$



### III шаг

Берем цепь  $(s, t)$ .  
Максимальное увеличение потока:  
 $\min\{(s, t)\} = 7 \Rightarrow$   
 $\varphi(s, a) = 4; \varphi(a, t) = 4; \varphi(s, t) = 7$ .  
Возвращаемся к шагу II.

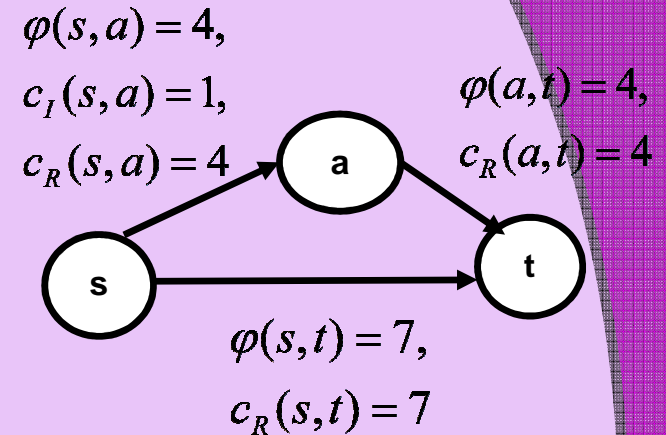


### III итерация

#### II шаг

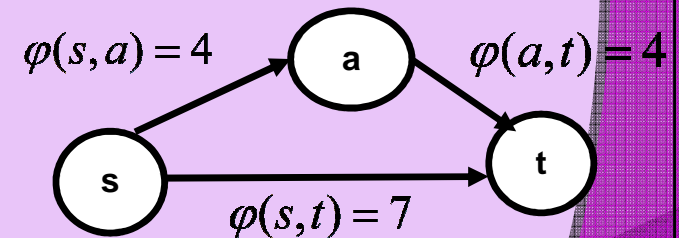
Пересчитываем величины  $c_I(x, y)$  и  $c_R(x, y)$ , корректируем состав множеств  $I$  и  $R$ .

$c(s, a) = 5$	$(s, a) \in I$	$c_I(s, a) = 1$
$\varphi(s, a) = 4 < c(s, a)$	$(s, a) \in R$	$c_R(s, a) = 4$
$c(a, t) = 4$	$(a, t) \notin I$	
$\varphi(a, t) = 4 = c(a, t)$	$(a, t) \notin R$	$c_R(a, t) = 4$
$c(s, t) = 7$	$(s, t) \notin I$	
$\varphi(s, t) = 7 = c(s, t)$	$(s, t) \notin R$	$c_R(s, t) = 7$



#### III шаг

Увеличивающую поток цепь найти не удастся, алгоритм поиска максимального потока заканчивает свою работу. Последний из построенных потоков является максимальным.



## **Вывод:**

В выбранный день всю группу туристов можно переправить из Чикаго в Стамбул. Четверо из десяти туристов могут осуществить перелет из Чикаго в Стамбул через Париж, а оставшиеся могут отправиться из Чикаго в Стамбул на прямом рейсе. Или семь туристов отправится из Чикаго в Стамбул на прямом рейсе, три туриста – через Париж.

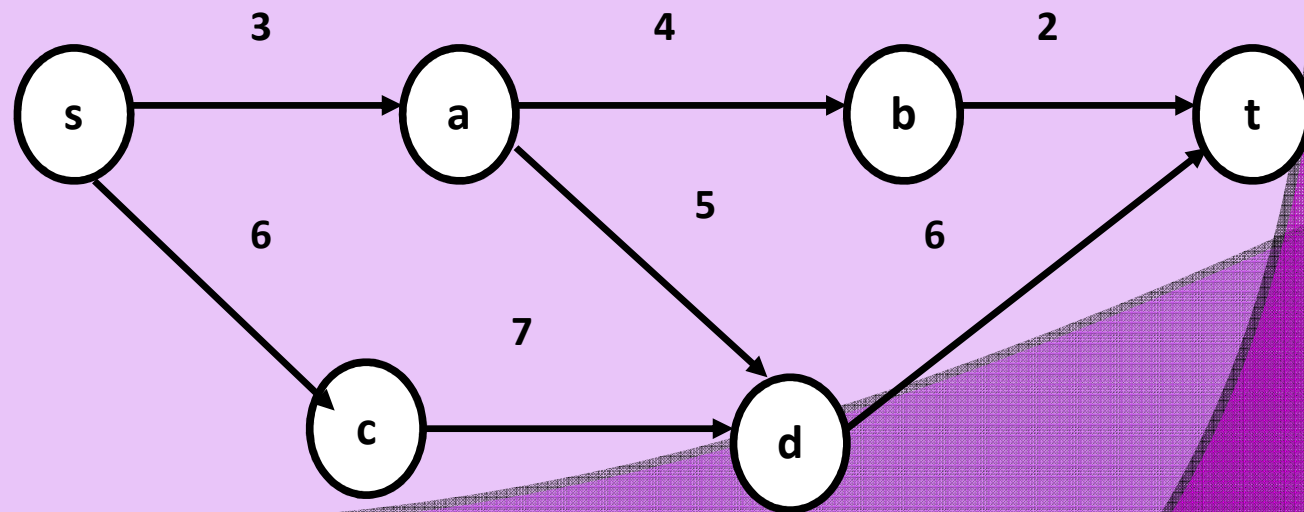
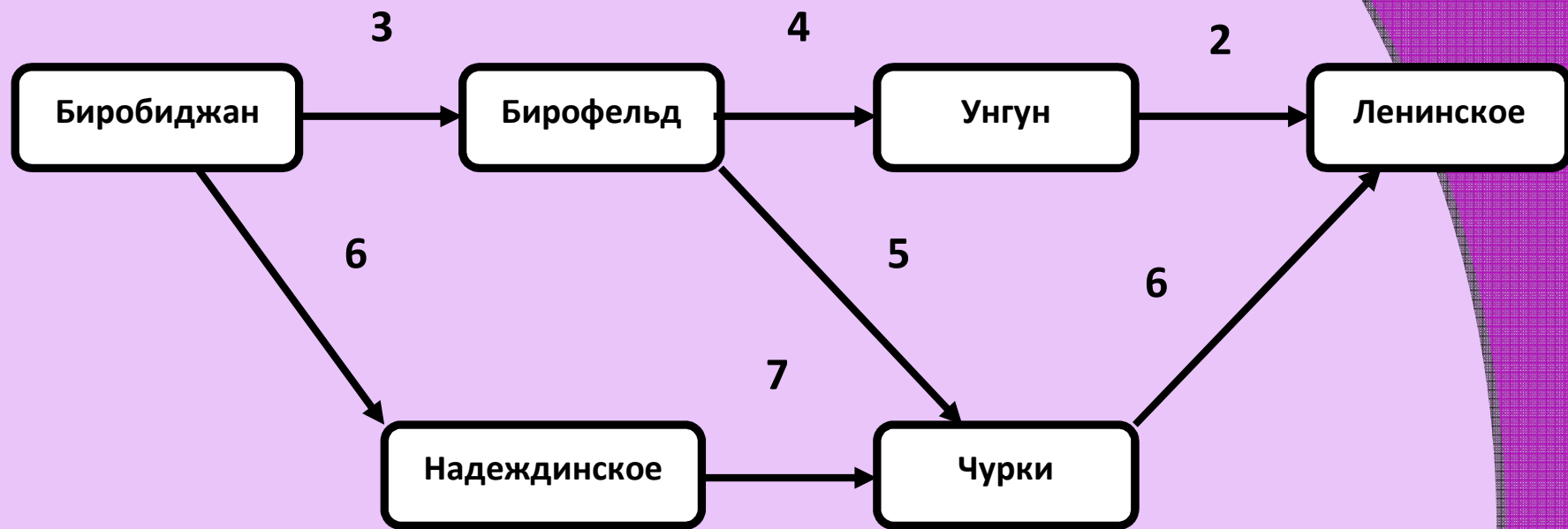


Фирма *N* г. Биробиджана занимается перевозками пассажиров. В один из дней ей необходимо перевести из г. Биробиджана в с. Ленинское 10 человек. В продаже имеются билеты на следующие рейсы автобусов:

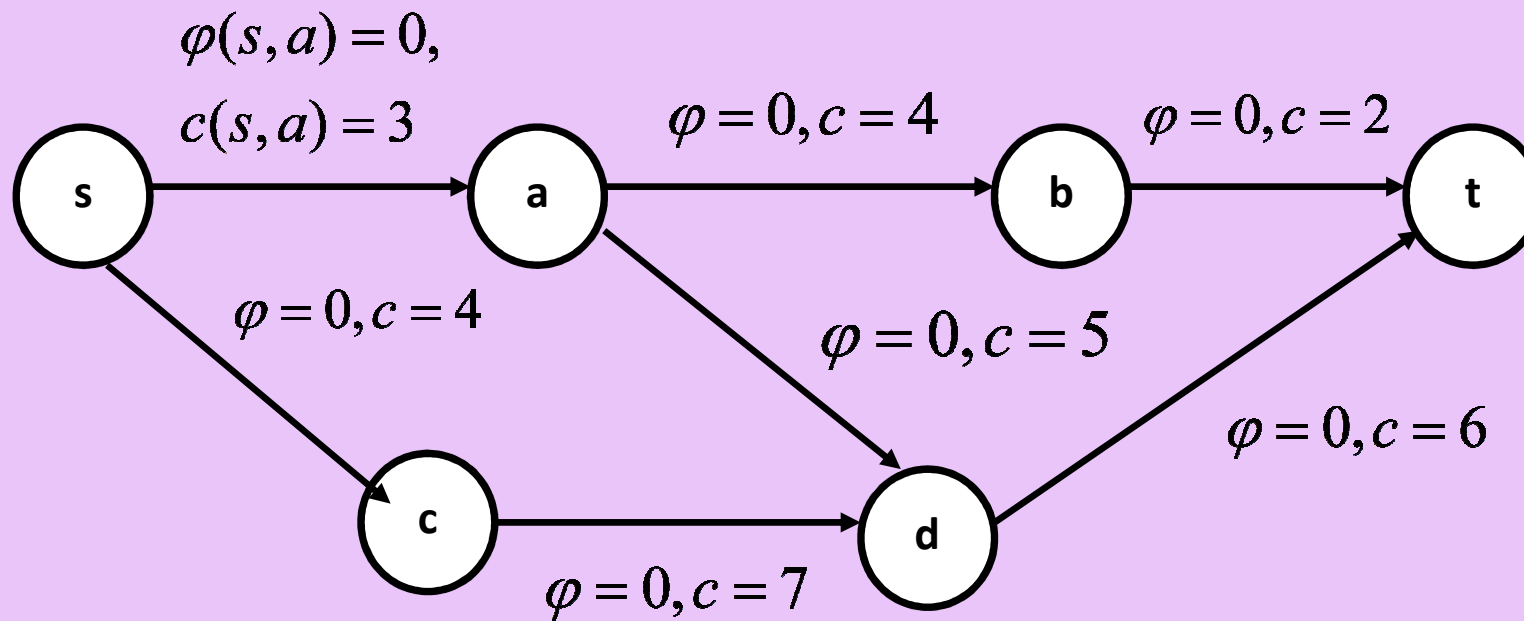
Рейс	Количество билетов
Биробиджан - Бирофельд	3
Бирофельд – Унгун	4
Унгун – Ленинское	2
Бирофельд – Чурки	5
Чурки – Ленинское	6
Биробиджан – Надеждинское	6
Надеждинское – Чурки	7

Можно ли осуществить перевозку 10 человек в один день?

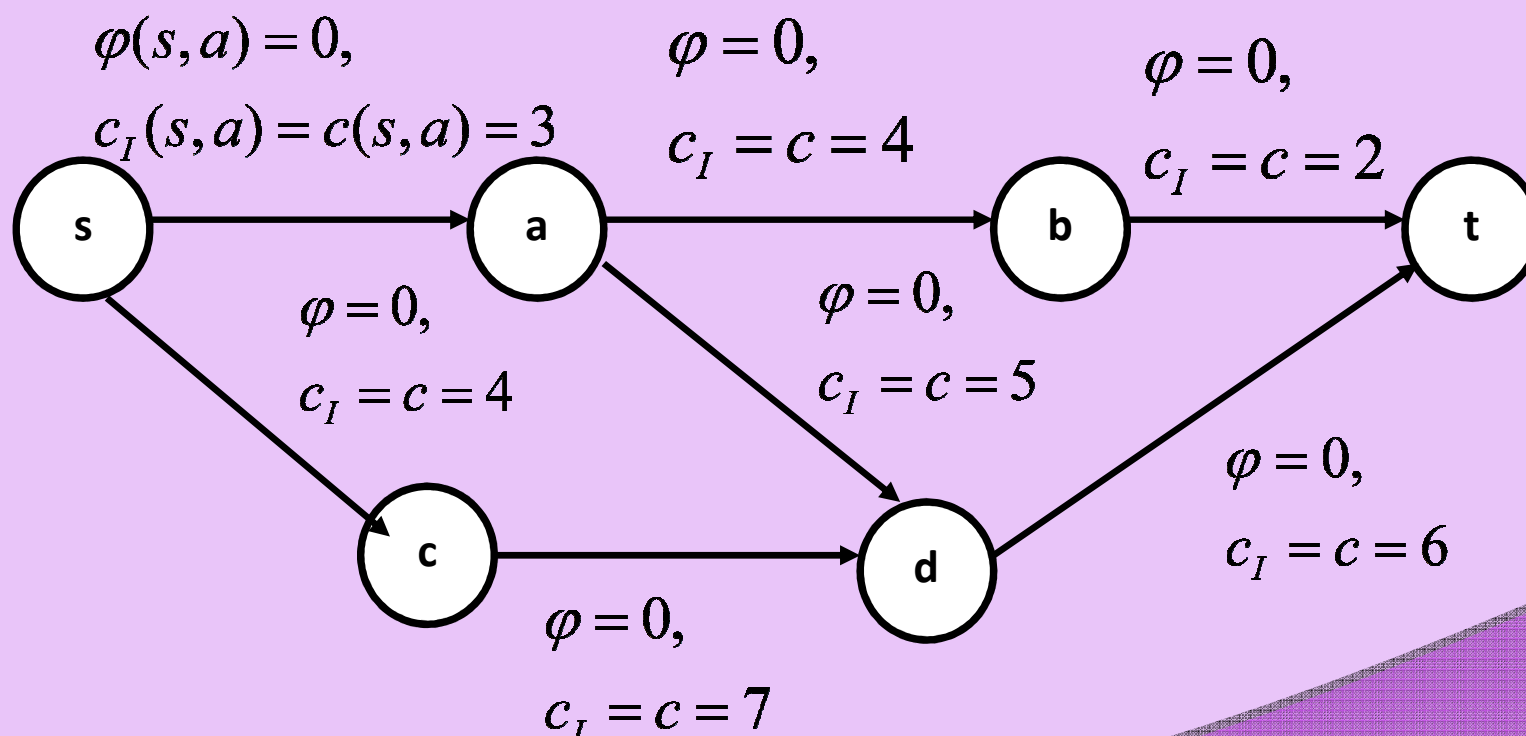
# Сеть, соответствующая условию задачи



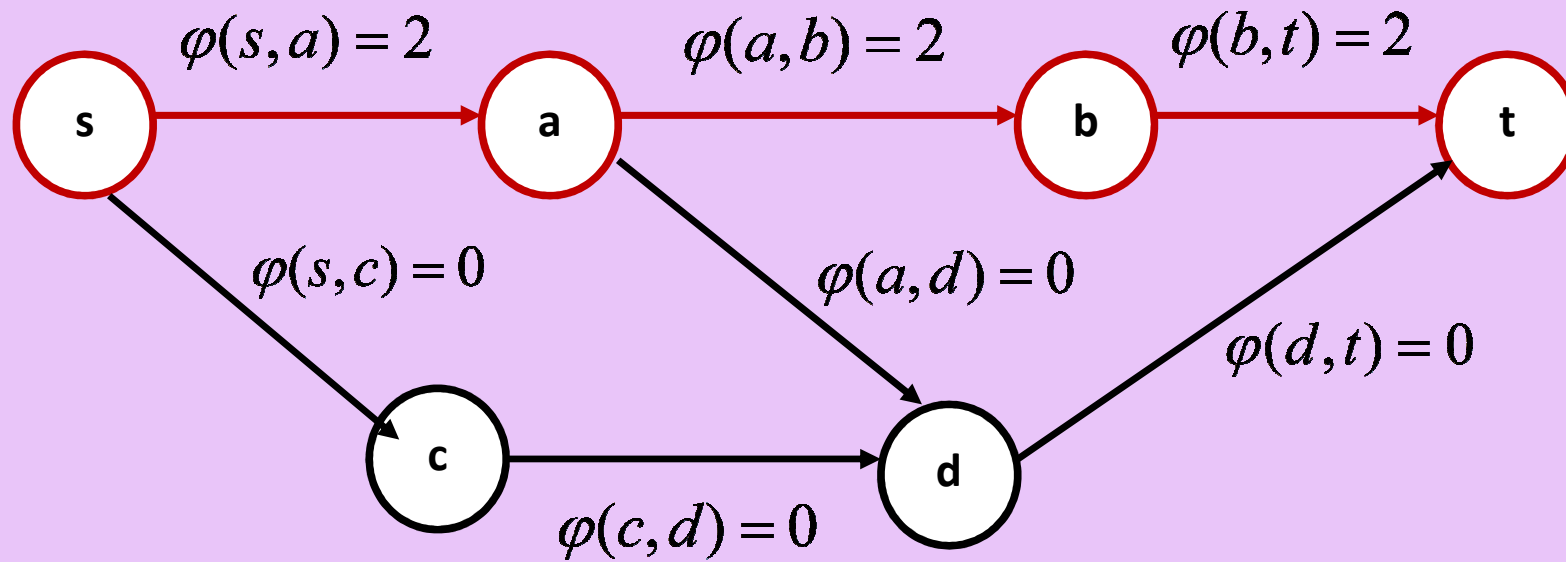
## I шаг. Задание начальных условий



## II шаг. Создание множеств $I$ и $R$ . Определение $c_I(x, y)$ , $c_R(x, y)$

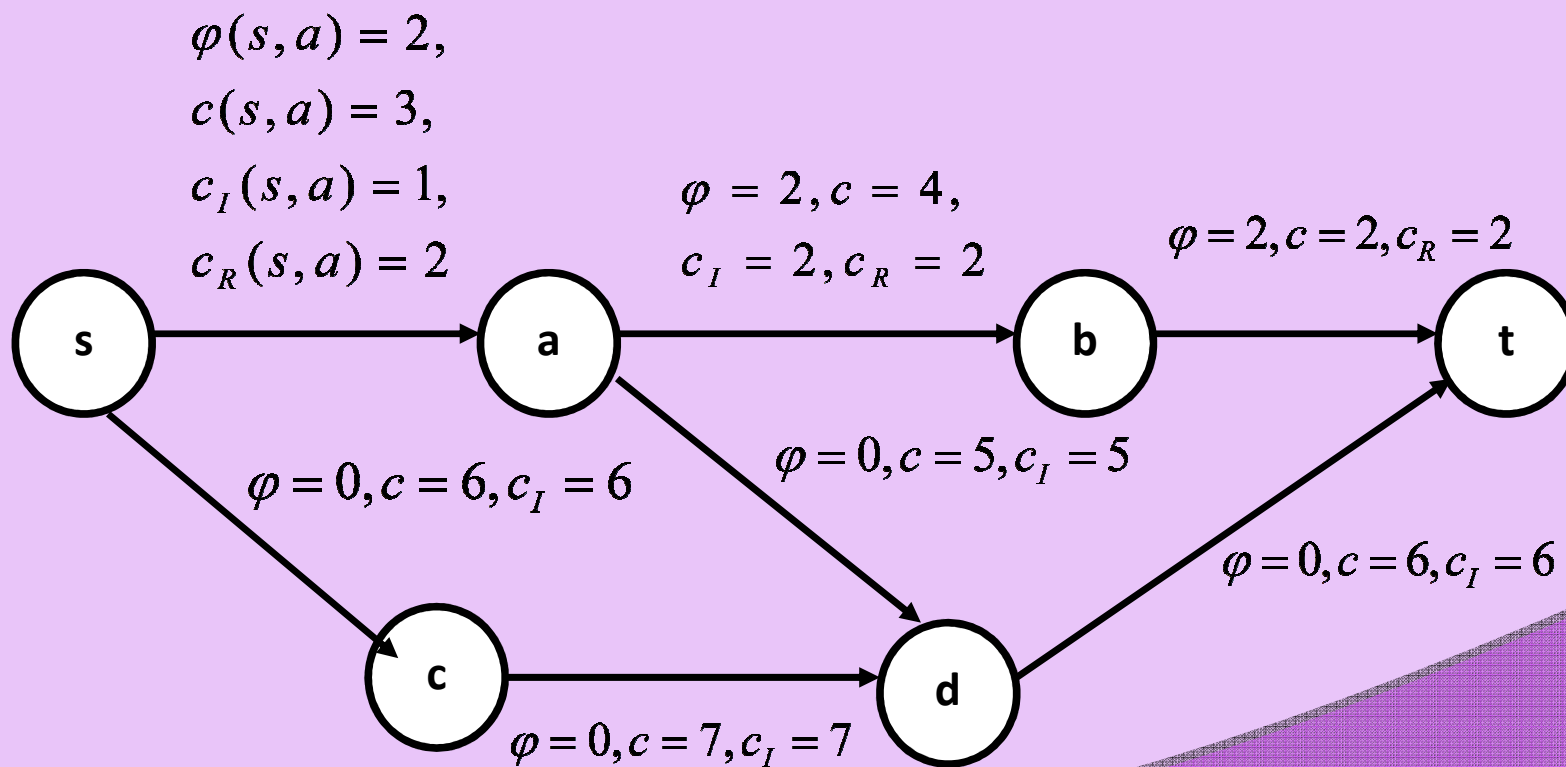


### III шаг. Поиск увеличивающей цепи

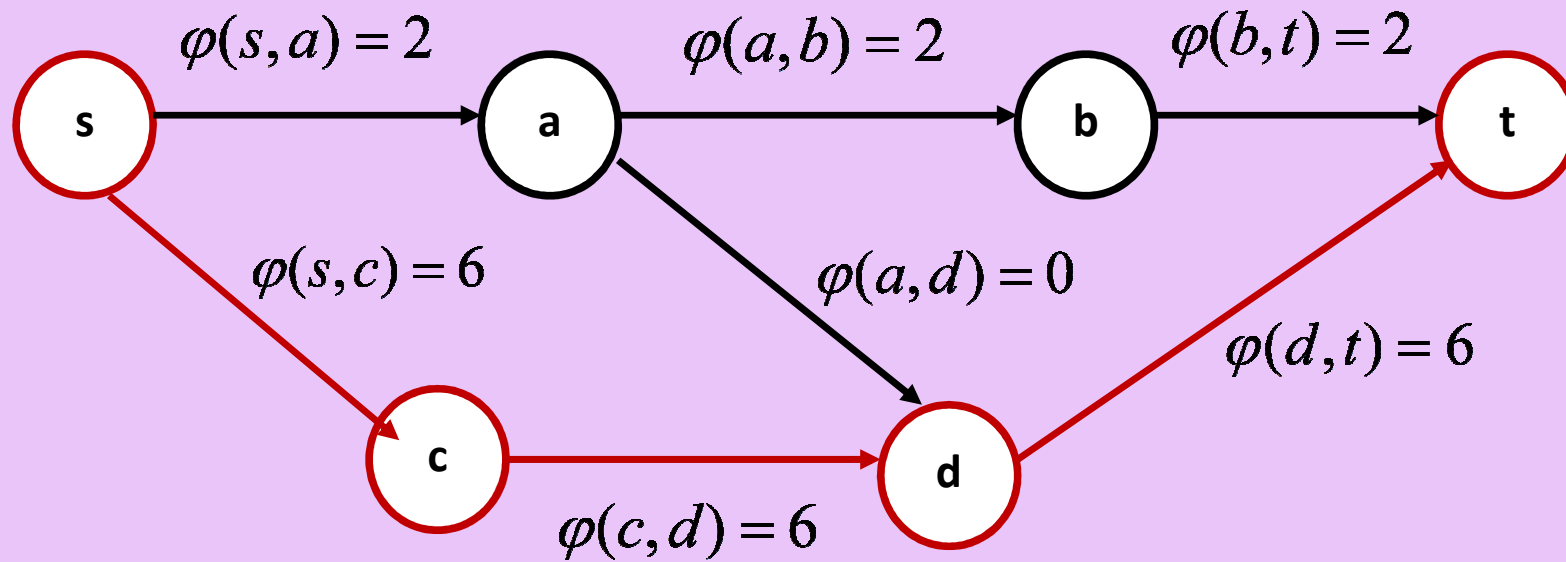


## II шаг. Создание множеств $I$ и $R$ . Определение

$c_I(x, y), c_R(x, y)$

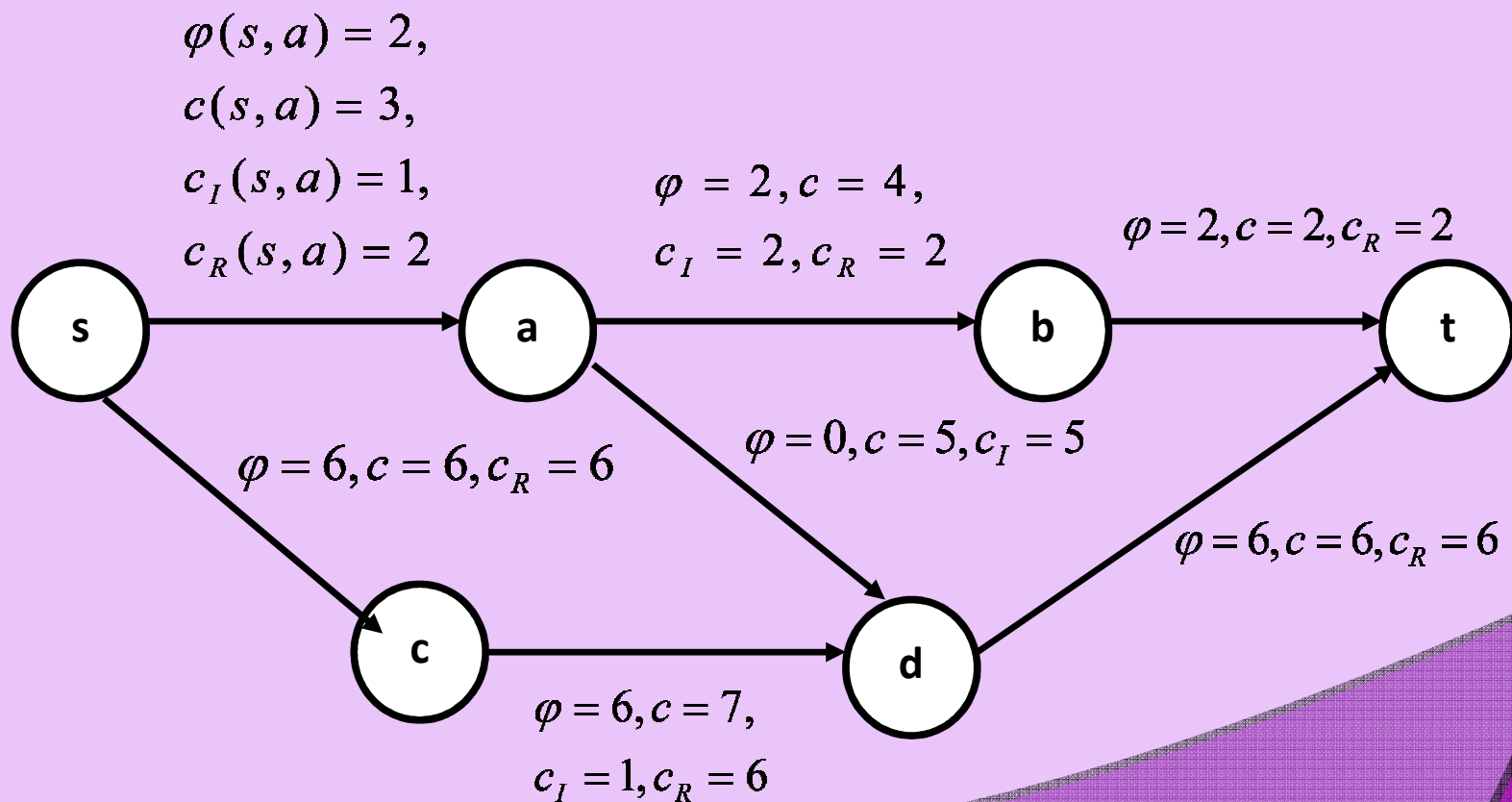


### III шаг. Поиск увеличивающей цепи



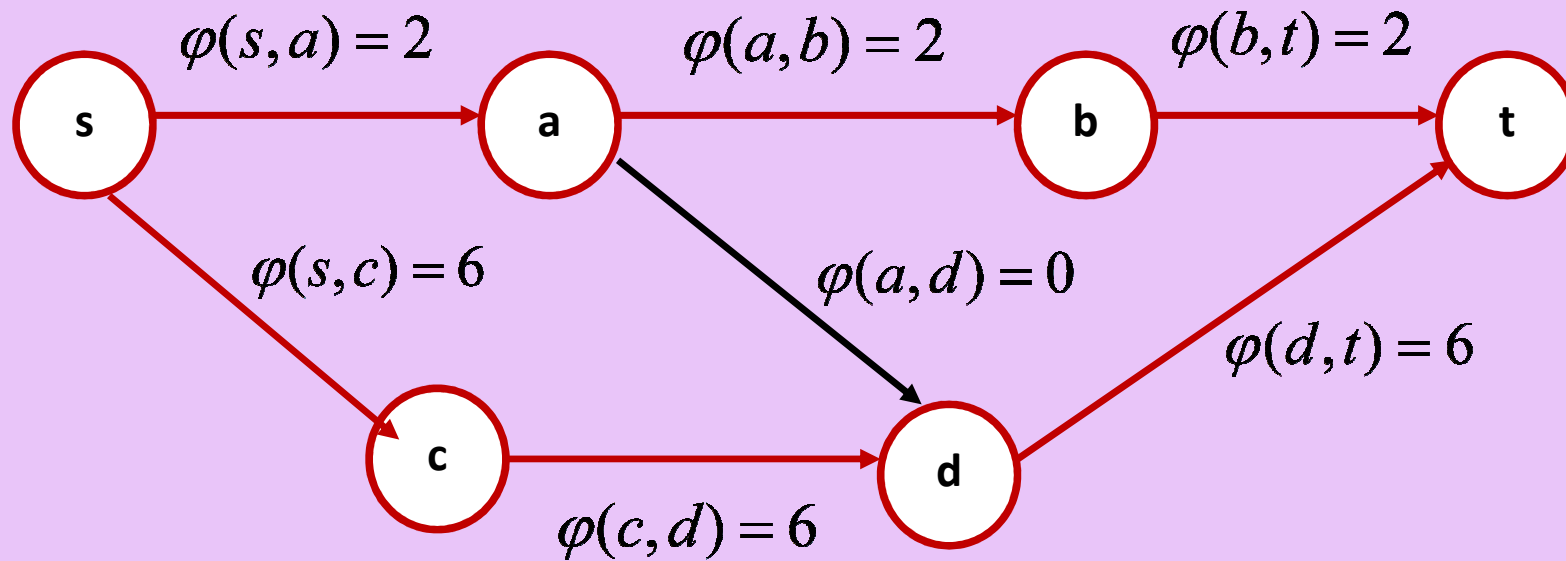
## II шаг. Создание множеств $I$ и $R$ . Определение

$c_I(x, y), c_R(x, y)$





### III шаг. Поиск увеличивающей цепи



Увеличивающую поток цепь найти не удастся, алгоритм поиска максимального потока заканчивает свою работу. Последний из построенных потоков является максимальным.

## **Вывод:**

Через построенную сеть можно пропустить из источника в сток 8 единиц потока без превышения пропускных способностей дуг. Поэтому перевозку 10 человек из г. Биробиджана в с. Ленинское в один день осуществить нельзя.

# **Нахождение максимального потока в сетях с ограниченными пропускными способностями дуг**

ФГБОУ ВПО «ДВГСГА», 3 курс  
Факультет «Математики,  
информационных технологий и техники»  
Хабибулина Татьяна Васильевна